SERIE "A", N° 4503
N° D'ORDRE : 5350

THÈSES

PRESENTEES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

PAR

M. Antoine CORDESSE

PREMIERE THESE

SUR DES REPRESENTATIONS DES RELATIONS D'ANTICOMMUTATION

DEUXIEME THESE

PROPOSITION DONNEE PAR LA FACULTE

soutenues le 18 Juin 1965 devant la Commission d'examen

M. LICHNEROWICZ	*Président*
Mme TONNELAT	*Examinatrices*
Mme CHOQUET-BRUHAT	
M. RIDEAU	*Rapporteur*

SERIE "A", N° 4503
N° D'ORDRE : 5350

THÈSES

PRESENTEES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

PAR

M. Antoine CORDESSE

PREMIERE THESE

SUR DES REPRESENTATIONS DES RELATIONS D'ANTICOMMUTATION

DEUXIEME THESE

PROPOSITION DONNEE PAR LA FACULTE

soutenues le 18 Juin 1965 devant la Commission d'examen

M. LICHNEROWICZ ..... *Président*

M^me^ TONNELAT .....
M^me^ CHOQUET-BRUHAT .... } *Examinatrices*

M. RIDEAU ..... *Rapporteur*

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

A mes parents,

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544306_0037

Je tiens à adresser, avec l'expression de mon profond respect, mes remerciements à M. le Professeur Louis de BROGLIE qui m'a accueilli, à mes débuts, au laboratoire de Théories physiques.

Je remercie très sincèrement M. le Professeur LICHNEROWICZ de m'avoir fait l'honneur d'accepter la présidence du jury.

Que Mme le Professeur TONNELAT trouve ici l'expression de ma reconnaissance pour m'avoir permis de travailler dans ce laboratoire et pour l'intérêt qu'elle m'a témoigné en acceptant de participer au jury.

Je remercie vivement Mme le Professeur CHOQUET-BRUHAT de m'avoir accordé son attention pour juger cette thèse et d'avoir bien voulu me proposer le second sujet.

Je tiens à remercier tout particulièrement M. RIDEAU qui m'a proposé ce sujet et m'a permis, par son aide efficace et constante, de le mener à bien. Qu'il trouve ici l'expression de ma reconnaissance la plus vraie pour les conseils et les encouragements qu'il m'a prodigués avec une si grande gentillesse tout au long de ces dernières années.

Je remercie enfin MM. GUICHARDET et GEORGE pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu témoigner à ce travail et pour les éclaircissements qu'ils m'ont apportés.

FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE PARIS

Professeurs

Doyen : M. ZAMANSKY

BRELOT	T.	Analyse supérieure
PRENANT	T.	Anatomie et histologie comparée
GRASSE	T.	Evolution des êtres organisés
PREVOST	T.	Chimie organique
WYART	T.	Minéralo et cristallo
TEISSIER	T.	Zoologie
MANGENOT	T.	Biologie végétale (Orsay)
AUGER	T.	Physique quantitatique et relativité
MONNIER	T.	Physiologie générale
PIVETEAU	T.	Paléontologie
ROCARD	T.	Physique E.N.S.
CARTAN	T.	Mathématiques E.N.S.
LAFFITTE	T.	Chimie générale
N...	T.	Géométrie supérieure
COULOMB	T.	Physique du globe
Mlle COUSIN	T.	Bilogie animale S.P.C.N.
CHRETIEN	T.	Chimie minérale
BOCQUET	T.	Zoologie
KASTIER	T.	Physique E.N.S.
EPHRUSSI	T.	Génétique
RIVIERE	T.	Géologie S.P.C.N. et sédiment (Orsay)
GAUTHERET	T.	Biologie végétale P.C.B.
LUCAS R.	T.	Recherches physiques
THOMAS A.	T.	Biologie cellulaire
ARNULF	T.	Optique appliquée
MORAND	T.	Physique enseignement
SOLEILLET	T.	Physique P.C.B.
FORTIER	T.	Mécanique expérimentale des fluides
DRACH	T.	Zoologie
QUENEY	T.	Météo et dynamique atmosphérique
GALLIEN	T.	Embryologie

EICHORN	T.	Botanique
DE CUGNAC	T.	Biologie végétale S.P.C.N.
Mlle CAUCHOIS	T.	Chimie physique
THELLIER	T.	Physique du globe
L'HERITIER	T.	Biologie générale (Orsay)
GRIVET	T.	Radioélectricité (Orsay)
PONCIN	T.	Mécanique générale
DU BREIL	T.	Arithmétique et théorie des nombres
QUELET	T.	Chimie organique
CAGNIARD	T.	Géophysique appliquée
CHAMPETIER	T.	Chimie macromoléculaire
CUVILLIER	T.	Micropaléontologie
JUNG	T.	Géologie
TRILLAT	T.	Microscopie et diffrac-électr.
WIEMANN	T.	Chimie organique et structurale
JACQUINOT	T.	Spectroscopie et physique céleste (Orsay)
VASSY	T.	Physique de l'atmosphère
DESTOUCHES	T.	Théorie physique
AMIEL	T.	Chimie générale
HOCART	T.	Minérallogie et cristallerie
MATHIEU J.-P.	T.	Physique optique
COUTEAUX	T.	Cytologie
MAY	T.	Zoologie
CHOQUET	T.	Théorie des fonctions et topologie
FELDMANN	T.	Biologie végétale marine
GUINIER	T.	Physique des solides (Orsay)
JOST	T.	Physiologie comparée
FORTET	T.	Calcul des probabilités et physique mathématiques
SCHWARTZ	T.	Calcul différentiel et intégral
CHOUARD	T.	Physiologie végétale
MALAVARD	T.	Aviation (technique aéronautique)
NORMANT	T.	Synthèse organique
BENARD	T.	Chimie minérale
BUVAT	T.	Botanique E.N.S.
DUGUE	T.	Statistique mathématiques
SOULAIRAC	T.	Psychophysiologie
ULRICH	T.	Physiologie végétale appliquée
MARECHAL	T.	Optique théologique et appliquée
KIRRMANN	T.	Théories chimiques
CHADEFAUD	T.	Botanique
Mlle LE BRETON	T.	Physiologie de la nutrition
LELONG	T.	Application de l'anatomie à la géométrie
DEVILLERS	T.	Anatomie et histologie comparée
EHRESMANN	T.	Topologie algébrique
FRANCON	T.	Physique S.P.C.N.
GLANGEAUD	T.	Géographie physique et géologique
DODEMENT	T.	Mathématiques M.G.P.
PISOT	T.	Technique mathématiques de la physique
ROCH	T.	Géologie
SCHATZMANN	T.	Astrophysique
TERMIER	T.	Géologie générale
ZAMANSKY	T.	Mathématiques générales
LENNUIER	T.	Physique M.G.P.
RIZET	T.	Génétique (Orsay)
ROUTHIER	T.	Physique théorique
Mme TONNELAT	T.	Géologie appliquée
DIXMIER	T.	Mathématiques M.P.C.
SOUCHAY	T.	Chimie générale
AIGRAIN	T.	Electrotechnique générale
BRUSSET	T.	Chimie systématique

LEVY M.	T.	Physique théorique des hautes énergies (Orsay)
Mme CHAIX	T.	Chimie biologique
Mme HUREL-PY	T.	Biologie végétale P.C.B.
STLKOWSKI	T.	Physiologie végétale
PANNETIER	T.	Chimie générale
BRUN	T.	Mécanique des fluides I
LEDERER	T.	Chimie biologique (Orsay)
Mme DUBREIL	T.	Mathématiques (agrégation)
Mme LELONG	T.	Mathématiques II E.N.S.
BELLAIR	T.	Géologie S.P.C.N.
COTTE	T.	Physique électricité
DUBOIS J.-E.	T.	Chimie organique
LAMOTTE	T.	Zoologie E.N.S.
MICHEL A.	T.	Chimie minérale (Orsay)
OLMER	T.	Energétique générale
ROUAULT	T.	Electricité (Orsay)
GAUTHIER	T.	Mécanique appliquée
BARCHEWITZ	T.	Chimie physique
BROSSEL	T.	Physique atomique
BUSER	T.	Physiologie comparée
CAMUS	T.	Physiologie végétale
CASTAING	T.	Physique II thermostatique (Orsay)
CURIEN	T.	Minéralogie et cristallerie
MOYSE	T.	Physiologie végétale (Orsay)
Mme CHARNIAUX-COTTON	T.	Evolution des êtres organisés
POSSOMPES	T.	Zoologie
PULLMANN	T.	Chimie quantitatique
TEILLAC	T.	Physique nucléaire et radioactivité (Orsay)
TONNELAT	T.	Biologie physico chimique (Orsay)
VILLE	T.	Econométrie
WILLEMART	T.	Chimie P.C.B.
DODE	T.	Chimie (Orsay)
FREYMANN	T.	Recherches physiques
GUINOCHET	T.	Biologie végétale S.P.C.N. (Orsay)
ROLLET	T.	Chimie minérale
Mlle JOSIEN	T.	Chimie S.P.C.N.
CHEVALLEY	T.	Géométrie algébrique et théorie des groupes
ARNOULT	T.	Electronique (Orsay)
CHAPELLE	T.	Physique I (Orsay)
DELANGE	T.	Mathématiques I (Orsay)
DENY	T.	Mathématiques générales (Orsay)
GERMAIN	T.	Mécanique théorique des fluides
LUCAS	T.	Géologie
ALLARD	T.	Chimie physique
BERTHELOT	T.	Physique des particules fondamentales (Orsay)
BRICARD	T.	Météorologie et physique de l'atmosphère
Mme ALBE-FESSARD	T.	Psychologie physiologique
FRIEDEL	T.	Physique des solides (Orsay)
JULIA M.	T.	Etude des moléculaires complexes
LENDER	T.	Biologie animale S.P.C.N. (Orsay)
MAGAT	T.	Physicochimie des radioéléments
Mlle QUINTIN	T.	Electrochimie
MONOD	T.	Chimie du métabolisme
BENOIT	T.	Physiologie animale (Orsay)
DE POSSEL	T.	Analyse numérique
CHARLOT	T.	Chimie analytique
LEMEE	T.	Ecologie végétale (Orsay)
GUERIN	T.	Chimie M.P.C. (Orsay)
CHATELET	T.	Chimie P.C.B.
JEAN	T.	Physiologie nucléaire (Orsay)

MATTLER	T.	Physique S.P.C.N.
BERGERARD	T.	Zoologie (Orsay)
BERTEIN	T.	Electronique (Orsay)
BOUISSIERES	T.	Radiochimie
Mme COUTURE	T.	Thermo et mécanique physique
ELLEMBERGER	T.	Géologie des grandes régions du globe (Orsay)
FRANC	T.	Biologie animale P.C.B.
SCHNELL		Botanique tropicale
ACHER	T.	Chimie biologique
BAUDOIN	T.	Biologie animale P.C.B.
BEAUMONT		Biologie animale S.P.C.N.
BLAMONT		Géophysique ionosphère
BOUREAU	T.	Botanique
CURIE D.		Physique M.G.P.
DURAND-DELGA	T.	Géologie
FREON	T.	Chimie organique (Orsay)
HELLER	T.	Physiologie végétale
TORTRAT	T.	Calcul des probabilités
CAILLEUX	T.	Géologie S.P.C.N.
MAGNAN		Physique électricité
DAUDEL	T.	Mécanique ondulatoire appliquée à la chimie théologique et à la physique nucléaire
Mlle FOURCROY		Biologie végétale S.P.C.N.
Mme CHOQUET-BRUHAT		Mécanique analytique et mécanique céleste
Mlle VEIL	T.	Physiologie générale
LWOFF	T.	Microbiologie
SIESTRUNCK	T.	Mécanique physique et expérimentale
LACOMBE	T.	Métallurgie des métaux nucléaires (Orsay)
BROCHARD	T.	Physique P.C.B. (Orsay)
CABANNES	T.	Mécanique générale
LESIEUR	T.	Mathématiques I (Orsay)
MAZET	T.	Mécanique générale (Orsay)
CAIRE		Géographie physique et géographie dynamique
COMOLET		Mécanique des fluides
CORABŒUF	T.	Physiologie animale (Orsay)
DELLOUE	T.	Physique de l'exosphère
GORENFLOT		Botanique II (Orsay)
HOUILLON		Biologie animale P.C.B.
JULLIEN J.		Chimie S.P.C.N. (Orsay)
MALGRANGE	T.	Technique mathématique de la physique (Orsay)
OLIVIER		Anthropologie
NOZERAN	T.	Botanique II (Orsay)
BLANC-LAPIERRE	T.	Physique E.N.S. (Orsay)
CHEVAUGEON	T.	Botanique (Orsay)
KAHANE	T.	Mathématiques (Orsay)
SAMUEL	T.	Mathématiques E.N.S. féminines
KOURGANOFF	T.	Astronomie (Orsay)
THIRY	T.	Mécanique céleste
ABELES		Physique S.P.C.N.
AMAT	T.	Physique P.C.B.
	T.	Géologie
Mme BENOIT-GUEUTAL	T.	Physique nucléaire et radioactivité (Orsay)
BOUGIS		Biologie marine (Villefranche-s.-Mer)
BRUHAT	T.	Mathématique M.P.C.
BRUNN	T.	Géologie historique (Orsay)
CHABBAL	T.	Physique M.G.P. (Orsay)

DEHEUVELS	T.	Mathématique propédeutique
D'ESPAGNAT	T.	Physique théorique (Orsay)
FURON	T.	Géologie S.P.C.N.
Mme GANS	T.	Génétique
GENEVES		Biologie végétale P.C.B.
GUILBERT		Physique C.U.S. (Orléans)
HUPE	T.	Pétrographie
HOLLANDE	T.	Biologie générale
LIONS	T.	Analyse numérique
MAITTE	T.	Chimie P.C.B.
MEYER		Physique propédeutique
NICOLAS		Géologie appliquée
PANIGEL		Biologie générale
RAVIER		Pétrographie
ROSEAU	T.	Mécanique théorique des fluides
ROUBINE		Electronique
SILBER	T.	Chimie P.C.B.
UEBERSFELD	T.	Electronique
YVON	T.	Théories physiques
HERVE	T.	Mathématiques
NERON	T.	Mathématique M.P.C. (Orsay)
Mme PECKER-WIMEL	T.	Astrophysique
BALKANSKY		Physique M.P.C.
LE CORRE	T.	Electricité
DELCROIX	T.	Physique théorique (Orsay)
GOURDIN		Physique théorique des hautes énergies (Orsay)
LEHMANN	T.	Physique expérimentale des hautes énergies
NATAF	T.	Physique nucléaire et radioactivité (Orsay)
ECHALIER		Biologie animale P.C.B.
BARRAUD		Physiologie cellulaire
LIORET		Physiologie végétale (Orsay)
DARS		Géologie structurale et géologie appliquée
CAMEFORT	T.	Botanique (agrégation)
VICHNIEWSKY	T.	Mécanique industrielle
BLAQUIERE		Electronique (Orsay)
ARNOUS	T.	Physique théorique
TATIBOUET		Chimie C.S.U. (Orléans)
MALLIATIN	T.	Mathématique propédeutique (Orsay)
GAUDEMAR		Chimie propédeutique
PEREZ Y JORBA		Physique expérimentale des hautes énergies (Orsay)
DAVID	T.	Chimie (agrégation Orsay)
BROUSSE	T.	Mécanique théorique
ROSCH	T.	Astronomie
GUY	T.	Physique expérimentale
LAZARD		Mathématique M.P.C.
MOREL Pierre		Physique M.P.C.
ARSAC		Programmation
LEFEBVRE		Chimie M.P.C.
CHAPEVILLE		Biochimie
BENOIT		Physique C.P.E.M.
RIO		Chimie C.P.E.M.
JAUZEIN		Géologie E.N.S.
PREVOST Georges		B.V. C.P.E.M.
FAVARD P.		B.A. C.P.E.M.
VILKAS		Chimie C.P.E.M.
Mlle FICINI		Chimie C.P.E.M.
LEQUEUX		Astronomie
COHEN-TANNOUDJI		Physique M.P.C.
TAVERNIER		Physique C.P.E.M.
Mme ROIZEN		Physique C.P.E.M.

DURAND M.	B.A. S.P.C.N.
PASCAUD	Physiologie
Mme PETIT	B.A. C.P.E.N.
BROUSSE	Géologie (Orsay)
CAGNIAC	Physique (agrégation Orsay)
LEBERRE	Zoologie (Orsay)
SCHEFFER	Microbiologie (Orsay)
DE GENNES	Physique des solides (Orsay)
RIOU	Physique nucléaire expérim. (Orsay)
CLAUSER	Chimie biologique (Orsay)
CHEVALIER	Physiologie animale (Orsay)
JANCOVICI	Physique atomique (Orsay)
FALK-VAIRANT	Physique nucléaire (Orsay)
FETIZON	Chimie propédeutique (Orsay)
CERF	Mathématiques (Orsay)

Le secrétaire général :
R. POULLAIN.

INTRODUCTION

Nous avons construit des représentations des relations d'anticommutation dans des espaces de Hilbert $\mathbf{H}$, c'est-à-dire que nous avons défini des opérateurs A_j de $\mathbf{L}(\mathbf{H})$ tels que :

$$A_j A_k + A_j A_k = 0 \qquad A_j^* A_k + A_k A_j^* = \delta_{jk}$$

Les espaces où nous avons réalisé ces représentations sont des espaces produits tensoriels infinis d'espaces de Hilbert.

Nous avons tout d'abord rappelé comment von Neumann a construit de tels espaces (chapitre I). Pour le problème qui nous concerne, nous avons utilisé des produits d'espaces ayant chacun deux dimensions.

Après avoir défini dans chaque $\mathbf{L}(\mathbf{H}_i)$ des opérateurs anticommutants, nous avons défini des représentations dans les produits finis d'espaces de Hilbert (chapitres III et IV). Nous avons remarqué que les résultats obtenus par von Neumann, pour les produits infinis, généralisent ceux obtenus pour les produits finis. Nous avons alors "étendu" au cas infini les représentations définies dans les produits finis, ce qui nous a permis de définir deux grandes familles de représentations [elles sont dites famille (1) et famille (2)]. Chacune de ces familles se décompose elle-même en un certain nombre de sous-familles caractérisées par les espaces où se réalisent les représentations (chapitre V).

Nous avons alors remarqué que certaines des représentations de la famille (1) sont identiques à certaines des représentations qu'ont définies Wightmann et Schweber : les représentations qu'ils appellent discrètes. Il nous a alors été possible de donner une caractérisation simple des représentations que nous avons obtenues qui peuvent être dites discrètes au sens où l'entendent Wightmann et Schweber (chapitre VI).

Nous avons ensuite étudié les équivalences unitaires entre les représentations de la famille (1) et nous avons donné une condition nécessaire et suffisante d'équivalence unitaire (chapitre VII).

Il nous a fallu ensuite traiter des questions de réductions de ces représentations. Nous avons donné un moyen de réduire complètement ces représentations (chapitre VII).

Nous avons ensuite donné un moyen de passer d'une famille de représentations à l'autre, ce qui nous a permis de montrer que les deux familles de représentations que nous avons définies sont équivalentes (chapitre VIII).

Nous avons terminé en donnant un autre moyen pour définir ces deux familles de représentations (chapitre IX).

Nous avons eu besoin, au cours de cette étude, de certaines propriétés des algèbres de von Neumann ; on trouvera dans la bibliographie des références qui permettront de retrouver les résultats utilisés.

CHAPITRE I

PRODUITS TENSORIELS INFINIS D'ESPACES DE HILBERT

1-1 Introduction

Nous allons tout au long de cette étude utiliser la notion de produit tensoriel infini d'espaces de Hilbert introduits par von Neumann dans [1]. Pour faciliter la lecture de la suite, indiquons comment sont construits ces produits et donnons leurs principales propriétés.

Les produits tensoriels infinis ont été construits de manière à généraliser les résultats obtenus pour les produits finis.

La définition la plus naturelle du produit tensoriel de deux espaces de Hilbert H^m et H^n a été donnée par Weyl. Il a défini le produit $H^m \otimes H^n$ (m dimension de H^m, n dimension de H^n) comme une variété à m x n dimensions engendrée par des éléments de la forme :

$$(1)\quad a \otimes b = (a_1 b_1, \ldots, a_1 b_n ; \ldots ; a_m b_1, \ldots, a_m b_n)$$

où a_i et b_i sont les coordonnées de $a \in H^m$ et $b \in H^n$. A l'aide de la formule (1), nous pouvons associer, par exemple, au produit $a \otimes b$ la matrice T définie par :

$$T = \| a_i \; b_j \| \qquad i = 1, 2, \ldots, m \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

Le produit scalaire (Tx,y), quels que soient $x \in H^m$ et $y \in H^n$, dont la valeur est donnée par (a,x).(b,y), peut être entendu comme la fonctionnelle linéaire en x et y qui représente l'élément $a \otimes b$.

Nous allons retrouver tous ces résultats dans le cas de produits infinis.

Dans tout ce chapitre, I sera un ensemble quelconque dont les éléments seront désignés par des lettres grecques minuscules. A chaque $\alpha \in I$, associons de façon arbitraire un espace de Hilbert H_α.

Nous voulons construire le produit tensoriel de ces H_α qui sera noté $\bigotimes_{\alpha \in I} H_\alpha$ de telle façon que :

1) $\bigotimes_{\alpha \in I} H_\alpha$ soit un espace de Hilbert.

2) Le produit tensoriel soit engendré par une famille d'éléments notés symboliquement $\bigotimes_{\alpha \in I} f_\alpha$ ($f_\alpha \in H_\alpha$ pour tout $\alpha \in I$). Sur cet espace, on introduira un produit scalaire noté (,) par :

$$2) \quad (\bigotimes_{\alpha \in I} f_\alpha , \bigotimes_{\alpha \in I} g_\alpha) = \prod_{\alpha \in I} (f_\alpha , g_\alpha)$$

en analogie avec les produits finis.

Remarquons que si la formule (2) s'étend sur $\bigotimes_{\alpha \in I} H_\alpha$ en un vrai produit scalaire, la norme de $\bigotimes_{\alpha \in I} f_\alpha$ vérifiera :

$$3) \quad \| \bigotimes_{\alpha \in I} f_\alpha \| = \prod_{\alpha \in I} \| f_\alpha \|$$

L'égalité (2) étant une relation entre deux suites $(f_\alpha ; \alpha \in I)$ et $(g_\alpha ; \alpha \in I)$, pour vérifier les propriétés classiques du produit scalaire, nous devrons faire en sorte que la convergence des produits $\prod_{\alpha \in I} \| f_\alpha \|$, $\prod_{\alpha \in I} \| g_\alpha \|$ entraîne celle du produit $\prod_{\alpha \in I} (f_\alpha , g_\alpha)$.

Il est clair qu'en premier lieu se posait le problème de la convergence des expressions du type $\prod_{\alpha \in I} z_\alpha$ où les z_α sont des nombres complexes. La notion de convergence adoptée par Von Neumann est une généralisation de la notion de convergence absolue définie pour les produits $\prod_{i \in I} z_i$ où I est dénombrable. Nous ne rappellerons pas ici les critères de convergences. On trouvera dans l'appendice A celui qui nous a servi par la suite. Cependant, Von Neumann introduit une notion particulière qui sera fondamentale par la suite. Il démontre que la convergence de la série $\sum_{\alpha \in I} | z_\alpha |$ est une condition nécessaire et suffisante pour celle de $\sum_{\alpha \in I} z_\alpha$ alors que la convergence du produit $\prod_{\alpha \in I} | z_\alpha |$ n'est qu'une condition nécessaire à la convergence de $\prod_{\alpha \in I} z_\alpha$. On définit alors une nouvelle notion de convergence des produits infinis par :

DEFINITION. — *Le produit* $\prod_{\alpha \in I} z_\alpha$ *est dit* quasi-convergent *si et seulement si le produit* $\prod_{\alpha \in I} | z_\alpha |$ *converge. Il a alors pour valeur :*

— *celle de* $\prod_{\alpha \in I} z_\alpha$ *s'il converge ;*

— *zéro si* $\prod_{\alpha \in I} z_\alpha$ *diverge.*

1-2 Suites C et C_0

La formule (3) nous montre que nous ne pouvons parler d'éléments du type $\bigotimes_{\alpha \in I} f_\alpha$ que si le produit $\prod_{\alpha \in I} \| f_\alpha \|$ est convergent. Définissons alors :

DEFINITION 1-2-1. — *Nous dirons qu'une suite* $(f_\alpha ; \alpha \in I)$ *est une suite C si et seulement si* $\prod_{\alpha \in I} \| f_\alpha \|$ *converge.*

D'autre part, tous les $\| f_\alpha \|$ étant non nuls, le produit $\prod_{\alpha \in I} \| f_\alpha \|$ converge si et seulement si la série $\sum_{\alpha \in I} \left| \| f_\alpha \| - 1 \right|$ converge. D'où :

DEFINITION 1-2-2. — *Nous dirons qu'une suite* $(f_\alpha ; \alpha \in I)$ *est une suite* C_0 *si et seulement si la série* $\sum_{\alpha \in I} \left| \| f_\alpha \| - 1 \right|$ *converge.*

1-3 Relations d'équivalence entre suites C_0

Il nous sera utile, pour étudier la structure du produit tensoriel complet, d'introduire deux relations d'équivalence sur les suites C_0. Ces relations nous permettront de décomposer le produit complet en sous-espaces plus faciles à étudier.

DEFINITION 1-3-1. — *Les deux suites* C_0 $(f_\alpha ; \alpha \in I)$ *et* $(g_\alpha ; \alpha \in I)$ *seront dites* fortement équivalentes *si et seulement si la série* $\sum_{\alpha \in I} \left| (f_\alpha , g_\alpha) - 1 \right|$ *converge.*

Cette relation, qui sera notée $\approx$, décompose l'ensemble des suites C_0 en classes d'équivalences, dites fortes, qui seront notées, dans toute la suite, par des majuscules littérales : **C**, **D**.

DEFINITION 1-3-2. — *Les deux suites* C_0 $(f_\alpha ; \alpha \in I)$ *et* $(g_\alpha ; \alpha \in I)$ *seront dites* faiblement équivalentes *si et seulement si on peut trouver une suite de nombres complexes* $(z_\alpha ; \alpha \in I)$ *et* $(|z_\alpha| = 1)$ *telle que les deux suites* C_0 $(f_\alpha ; \alpha \in I)$ *et* $(z_\alpha g_\alpha ; \alpha \in I)$ *soient fortement équivalentes.*

Cette relation, notée $\underset{w}{\approx}$, décompose l'ensemble des suites C_0 en classes d'équivalence, dites faibles, qui seront notées par des majuscules littérales indexées : $\mathbf{C}_w$, $\mathbf{D}_w$. Par abus de langage, si deux classes d'équivalences fortes sont éléments d'une même classe faible, nous dirons qu'elles sont faiblement équivalentes.

D'autre part, on démontre que deux suites C_o $(f_\alpha ; \alpha \in I)$ et $(g_\alpha ; \alpha \in I)$ sont faiblement équivalentes si et seulement si la série $\sum_{\alpha \in I} \left| |(f_\alpha , g_\alpha)| - 1 \right|$ converge.

Il faut enfin noter que chaque classe forte contient au moins une suite C_o ayant tous ses termes normés à un. L'existence de cette suite va nous servir constamment par la suite.

1-4 Construction du produit tensoriel complet

A partir de maintenant, toutes les suites que nous considérerons seront des suites C_o.

Soit alors F une fonction, à valeurs complexes, définie sur l'ensemble des suites C_o. L'ensemble des fonctions F vérifiant :

— $z\, F(f_\alpha) = F(z\, f_\alpha)$

— $F(f_\alpha + g_\alpha) = F(f_\alpha) + F(g_\alpha)$

— $(F + G)(f_\alpha) = F(f_\alpha) + G(f_\alpha)$

est un espace vectoriel E.

Considérons alors une suite C_o $(f^\circ_\alpha ; \alpha \in I)$. Nous savons que l'expression $\prod_{\alpha \in I} (f^\circ_\alpha , f_\alpha)$ a un sens pour toute suite $(f_\alpha ; \alpha \in I)$.

Soit alors $F(f_\alpha ; \alpha \in I) = \prod_{\alpha \in I} (f^\circ_\alpha , f_\alpha)$; nous écrirons symboliquement $F = \bigotimes_{\alpha \in I} f^\circ_\alpha$.

Soit alors $\bigotimes'_{\alpha \in I} H_\alpha$ l'espace engendré par tous les éléments du type $\bigotimes_{\alpha \in I} f_\alpha$. C'est un espace vectoriel sur lequel nous introduisons un produit scalaire par :

— $(\Phi, \Psi) = \sum_{\mu=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{q} \prod_{\alpha \in I} (f^\circ_{\alpha, \mu} , g^\circ_{\alpha, \mu})$

où $\Phi = \sum_{\mu=1}^{p} \bigotimes_{\alpha \in I} f^\circ_{\alpha, \mu}$ et $\Psi = \sum_{\nu=1}^{q} \bigotimes_{\alpha \in I} g^\circ_{\alpha, \nu}$

Cet espace, muni de ce produit scalaire, n'est pas un espace complet. Nous pouvons alors le compléter et c'est ce complété qui est appelé *produit tensoriel complet des espaces* H_α. Nous le noterons $\bigotimes_{\alpha \in I} H_\alpha$. Si $f \in \bigotimes_{\alpha \in I} H_\alpha$ est limite d'une suite (f_i) d'éléments de

$\bigotimes'_{\alpha \in I} H_\alpha$ et $g \in \bigotimes_{\alpha \in I} H_\alpha$ est limite d'une suite (g_i) d'éléments de $\bigotimes'_{\alpha \in I} H_\alpha$, le produit scalaire (f, g) sera défini dans le produit complet par :

$$(f, g) = \lim_{i \to \infty} (f_i, g_i)$$

et on démontre que cette limite existe pour autant que toutes les suites considérées sont des suites C_0.

1-5 Produits incomplets (1)

Soit C une classe d'équivalence forte telle qu'elle a été définie au paragraphe 1-3.

Nous appellerons produit tensoriel incomplet associé à la classe C et nous noterons $\bigotimes^C_{\alpha \in I} H$ la fermeture pour la topologie du produit complet du sous-espace engendré par toutes les suites C_0 de C

On démontre alors que :

1) La suite $(f^\circ_\alpha ; \alpha \in I)$ étant une suite de C dont tous les termes sont normés à un, le produit incomplet $\bigotimes^C_{\alpha \in I} H_\alpha$ est l'espace vectoriel fermé engendré par toutes les suites C_0 $(f_\alpha ; \alpha \in I)$ de C pour lesquelles $f_\alpha \neq f^\circ_\alpha$ pour un nombre fini de α.

2) Tous ces produits complets sont isomorphes.

3) La somme directe de tous les produits incomplets est le produit complet.

D'une façon tout à fait analogue, on peut définir les produits incomplets associés aux diverses classes d'équivalence faibles. Le produit associé à la classe C_w sera noté $\bigotimes^{Cw}_{\alpha \in I} H_\alpha$.

Il est clair que deux produits incomplets du type $\bigotimes^C_{\alpha \in I} H_\alpha$ et $\bigotimes^D_{\alpha \in I} H_\alpha$ où C et D sont deux classes faiblement équivalentes appartiennent à un même produit du type $\bigotimes^{Cw}_{\alpha \in I} H_\alpha$. A partir de maintenant, nous appellerons produits *fortement incomplets* les produits engendrés par des classes d'équivalences fortes et produits *faiblement incomplets* les produits engendrés par des classes d'équivalences faibles.

---

(1) Nous avons appelé ces espaces « produits incomplets » pour conserver la terminologie introduite par von Neumann. On doit cependant noter que, pour la topologie considérée, ce sont des espaces complets.

1-6 Etension des opérateurs au produit complet

Il est utile de savoir quelles vont être les relations entre les opérateurs de $\mathbf{L}(H_\alpha)$ et ceux de $\mathbf{L}(\bigotimes_{\alpha \in I} H_\alpha)$. Soit $A_\beta \in \mathbf{L}(H_\beta)$. On démontre qu'il existe un et un seul opérateur $\overline{A}_\beta \in \mathbf{L}(\bigotimes_{\alpha \in I} H_\alpha)$ tel que pour toute suite $(f_\alpha ; \alpha \in I)$ on ait :

$$\overline{A}_\beta \bigotimes_{\alpha \in I} f_\alpha = (A_\beta f_\beta) \bigotimes (\bigotimes_{\alpha \in I, \alpha \neq \beta} f_\alpha)$$

Cet opérateur $\overline{A}_\beta$ est appelé "extension" de l'opérateur A_β au produit complet.

Nous appellerons $\mathfrak{B}^\#$ l'algèbre engendrée par tous les $\overline{A}_\beta$ quel que soit $A_\beta \in \mathbf{L}(H_\beta)$. Il est bon de donner une condition nécessaire et suffisante d'appartenance à $\mathfrak{B}^\#$. Pour ce faire, on démontre l'existence d'opérateurs unitaires $U(z_\alpha ; \alpha \in I)$ (z_α complexes) définis par :

$$U(z_\alpha) \bigotimes_{\alpha \in I} f_\alpha = \bigotimes_{\alpha \in I} z_\alpha f_\alpha$$

On peut alors démontrer que $A \in \mathfrak{B}^\#$ si et seulement si A commute avec tous les opérateurs U et avec tous les projecteurs associés aux divers produits fortement incomplets.

Notons enfin que les opérateurs U tels qu'ils viennent d'être définis appliquent un espace produit faiblement incomplet sur lui-même et un espace fortement incomplet sur lui-même à condition que le produit $\prod_{\alpha \in I} z_\alpha$ converge.

Quand l'ensemble d'indices I est à un nombre fini d'éléments, on retrouve la définition habituelle des produits tensoriels finis.

1-7 Cas particuliers

Pour la construction des représentations des relations d'anticommutation, nous aurons à utiliser des produits tensoriels infinis d'espaces de Hilbert à deux dimensions.

Nous avons étudié antérieurement en détail ces espaces [5]. Nous avons montré que l'ensemble des vecteurs e_{I_p} définis par :

$$e_{I_p} = \bigotimes_{I - I_p} f_\alpha \bigotimes_{I_p} g_\alpha$$

où $(f_\alpha , g_\alpha) = o$ pour tout α et I_p est ensemble fini forme une base orthogonale complète pour les espaces produits fortement incomplets. La connaissance de cette base sera très utile pour la suite.

CHAPITRE II

REMARQUES PRELIMINAIRES

2-1 Notations et définitions

Dans toute la suite, nous désignerons par :

1) I, un ensemble infini dénombrable d'éléments qui seront notés par des lettres minuscules i, j, k.

2) $(H_i ; i \in I)$, une suite d'espaces de Hilbert à deux dimensions rapportés à une base orthonormale complète $(e_i^1 ; e_i^2)$.

3) (α), une suite de nombres réels $(\alpha_i ; i \in I)$ où $\alpha_i = 0$ ou 1 pour tous les i de I.

Nous dirons que nous aurons une représentation des relations d'anticommutation dans un espace de Hilbert H si nous avons construit un ensemble d'opérateurs A_k $(k = 1, 2,...)$ de $L(H)$ vérifiant :

$$A_j A_k + A_k A_j = 0 \quad \text{pour tous j et k de I}$$

$$A_j^* A_k + A_k A_j^* = \delta_{jk} \quad \text{pour tous j et k de I}$$

2-2 But de notre étude

Une suite $(H_i ; i \in I)$ étant donnée, nous nous proposons de trouver des représentations des relations d'anticommutation dans le produit tensoriel infini $\bigotimes_{i \in I} H_i$.

Nous avons été guidés dans cette étude par un article de Wightmann et Schweber [7] dont nous résumerons ici les principaux résultats.

Ils recherchent des représentations des relations d'anticommutation dans des espaces de Hilbert H. Ils introduisent l'ensemble des projecteurs commutants $N_i = A_i^* A_i$. Les N_i et $(1\text{-}N_i)$ étant des projecteurs commutants, aucun d'entre eux ne peut être nul (ceci à cause des relations d'anticommutation entre les A_i). Ainsi, aucun produit fini de

ces opérateurs n'est nul. En effet, grâce aux relations entre les A_i, un tel produit peut se mettre sous la forme $\Sigma \pm \Pi A_i \Pi A_j^*$ (où ΠA_i^* est un produit de A_i^* distinct).

On peut alors définir un ensemble de projecteurs $E^M_{(\alpha)}$ par :

$$E^M_{(\alpha)} = \prod_{J=1}^{M} N_j^{\alpha_j} (1 - N_j)^{1-\alpha_j}$$

la suite $(\alpha_i ; i \in I)$ étant une suite (α).

On démontre alors que $\lim_{M \to \infty} E^M_{(\alpha)}$ existe et on écrit :

$$E_{(\alpha)} = \prod_{i \in I} N_i^{\alpha_i} (1 - N_i)^{1-\alpha_i}$$

C'est à l'aide de ces projecteurs que l'ensemble des représentations est décomposé en deux sous-ensembles disjoints en posant les définitions suivantes :

DEFINITION 2-2-1. — *Soit* $\mathcal{H}$ *un espace de Hilbert.*

Si $E_{(\alpha)}$ *est nul sur* $\mathcal{H}$ *pour toutes les suites* (α), *la représentation dans* $\mathcal{H}$ *est dite* continue.

Si $E_{(\alpha)}$ *est non nul sur* $\mathcal{H}$ *pour une suite* (α) *au moins, la représentation dans sera dite* discrète.

La forme même de ces projecteurs $E_{(\alpha)}$ nous fait penser à la forme de certains opérateurs de $\mathcal{L}(\bigotimes_{i \in I} \mathcal{H}_i)$. C'est avant tout cette remarque qui nous a conduit à penser que la technique des produits infinis d'espaces de Hilbert pouvait donner des résultats intéressants dans la recherche des représentations des relations d'anticommutation.

Le plan de cette étude sera le suivant :

1) Définition dans chaque $\mathcal{H}_i$ d'opérateurs anticommutants.

2) Etude de l'extension de ces opérateurs aux divers produits fortement incomplets. On verra que ces opérateurs ne forment pas une représentation des relations d'anticommutations.

3) Ayant remarqué que les produits infinis étaient obtenus comme généralisation des produits finis, nous avons explicité les représentations dans ces produits finis.

4) Extension des résultats obtenus en 3) au cas des produits infinis.

5) Caractérisation des représentations discrètes et des représentations continues.

6) Etude des propriétés des représentations obtenues, c'est-à-dire problèmes d'équivalence et d'irréductibilité.

CHAPITRE III

OPERATEURS DANS LES H_i ET LEURS EXTENSIONS

3-1 Définition des opérateurs a_i dans H_i

Soit donné un espace H_i et définissons dans $L(H_i)$ un opérateur a_i et son adjoint a_i^* par les relations [1]

$$a_i e_i^1 = 0 \qquad a_i e_i^2 = e_i^1$$
$$a_i^* e_i^1 = e_i^2 \qquad a_i^* e_i^2 = 0 \qquad (3\text{-}1\text{-}1)$$

de sorte que :

$$a_i a_i + a_i a_i = 0$$
$$a_i^* a_i + a_i a_i^* = 1 \qquad (3\text{-}1\text{-}2)$$

Nous pouvons alors définir un opérateur $N_i = a_i^* a_i$, et en tenant compte des relations (3-1-1) et (3-1-2), nous obtenons :

$$N_i e_i^1 = 0 \qquad N_i e_i^2 = e_i^2 \qquad N_i N_i = N_i$$

Nous voyons donc que N_i est le projecteur sur le vecteur de base e_i^2.

3-2 Extension de ces opérateurs au produit complet

Soit $(f_i ; i \in I)$ une suite C_0 et soit définis dans chaque espace de la suite $(H_i ; i \in I)$ des opérateurs a_i par les relations (3-1-1). Nous

---

(1) e_i^1 et e_i^2 forment une base orthonormée de l'espace de Hilbert à deux dimensions H_i.

savons que pour chaque i, il existe dans le produit tensoriel infini des H_i un et un seul opérateur $\overline{a_i}$ tel que :

$$\overline{a}_j \bigotimes_{i\varepsilon I} f_i = (a_j f_j) \bigotimes_{i\neq j} f_i$$

$$\overline{a^*}_j \bigotimes_{i\varepsilon I} f_i = (a^*_j f_j) \bigotimes_{i\neq j} f_i$$

La correspondance entre $L(H_i)$ et $L\left(\bigotimes_{i\varepsilon I} H_i\right)$ étant un homomorphisme injectif d'algèbres, il est facile de voir que :

$$\overline{a^*}_j \overline{a}_j + \overline{a}_j \overline{a^*}_j = 1$$

$$\overline{a}_j \overline{a}_j + \overline{a}_j \overline{a}_j = 0$$

$$\overline{a^*}_j \overline{a}_k - \overline{a}_k \overline{a^*}_j = 0 \qquad j \neq k$$

$$\overline{a}_j \overline{a}_k - \overline{a}_k \overline{a}_j = 0 \qquad j \neq k$$

De tels opérateurs ne forment donc pas une représentation des relations d'anticommutation dans le produit tensoriel complet.

D'autre part, nous pouvons définir $\overline{N_k}$, extension de N_k, par :

$$\overline{N}_k \bigotimes_{i\varepsilon I} f_i = (N_k f_k) \bigotimes_{i\neq k} f_i$$

et si pour tous les $i \in I$, $f_i = C^1_i e^1_i + C^2_i e^2_i$, on a :

$$\overline{a}_j \bigotimes_{i\varepsilon I} f_i = (C^2_j e^1_j) \bigotimes_{i\neq j} f_i$$

$$\overline{a^*}_j \bigotimes_{i\varepsilon I} f_i = (C^1_j e^2_j) \bigotimes_{i\neq j} f_i$$

$$\overline{N}_j \bigotimes_{i\varepsilon I} f_i = (C^2_j e^2_j) \bigotimes_{i\neq j} f_i$$

CHAPITRE IV

REPRESENTATIONS DANS LES PRODUITS FINIS

4-1 Introduction

Nous avons vu au chapitre I que les produits tensoriels infinis ont été obtenus comme généralisation des produits finis.

Il nous a paru alors naturel de rechercher en premier lieu les représentations des relations d'anticommutation dans les espaces produits tensoriels finis d'espaces de Hilbert.

Soit alors $H = \bigotimes_{i=1}^{n} H_i$, les H_i étant tous de dimension deux. Les extensions des opérateurs définis au chapitre III ne formant pas une représentation telle que nous la recherchons, nous avons alors pensé définir des opérateurs $A_j = \prod_{i \neq j} \overline{V_i}\ \overline{A_j}$ et recherché les V_i de façon à avoir des relations d'anticommutation entre les A_j. Ce problème n'a pas de solution.

Nous avons alors défini les opérateurs :

$$A_j(1) = \prod_{i<j} \overline{U_i}\ \overline{A_j} \qquad A_j(2) = \overline{A_j} \prod_{i<j} \overline{V_i}$$

et nous sommes ramenés à rechercher les U_i et les V_i pour que $A_j(1)$ et $A_j(2)$ vérifient les relations d'anticommutation. Nous allons voir que ce problème admet des solutions. Nous retrouverons ainsi, à un isomorphisme près, les représentations qu'avait trouvées Jordan [6].

Notons, avant de commencer les calculs, que les adjoints de $A_j(1)$ et $A_j(2)$ se mettent sous la forme :

$$A_j^*(1) = \prod_{i<j} \overline{U_i^*}\ a_j^* \qquad A_j^*(2) = a_j^* \prod_{i>j} \overline{V_i^*}$$

car les opérateurs surlignés munis d'indices distincts commutent. L'application de $L(H_i)$ dans $L\left(\bigotimes_{i \in I} H_i\right)$ est par ailleurs un * homomorphisme.

4-2 Recherche des opérateurs de la représentation définis par A_j (1)

Nous allons donc rechercher les U_i de $\mathbf{L}(H_i)$ qui ont été définis au paragraphe précédent de façon à ce que pour tout j, on ait :

$$1)\ A_j(1)\,A_k(1) + A_k(1)\,A_j(1) = 0$$

$$2)\ A^*_j(1)\,A_k(1) + A_k(1)\,A^*_j(1) = \delta_{jk}$$

Soit $f = \bigotimes_{i=1}^{n} f_i$ un élément non nul de l'espace H. Dans tout ce paragraphe, nous poserons :

$$f_i = C^1_i e^1_i + C^2_i e^2_i \ ;\ U f_i = D^1_i e^1_i + D^2_i e^2_i \ ;\ U^* f_i = E^1_i e^1_i + E^2_i e^2_i$$

1) *Etude de la première relation*

$$A_k(1)\,A_k(1) \bigotimes_{i=1}^{n} f_i = A_k(1)\left(\bigotimes_{i<k} U f_i \otimes C^2_k e^1_k \otimes \bigotimes_{i>k} f_i\right) = 0$$

Si, maintenant, nous supposons $j < k$, il vient :

$$A_k(1)\,A_j(1) \bigotimes_{i=1}^{n} f_i = A_k(1)\left(\bigotimes_{i<j} U f_i \otimes C^2_j e^1_j \otimes \bigotimes_{i>j} f_i\right)$$

$$= \bigotimes_{i<j} U U f_i \otimes C^2_j U e^1_j \otimes \bigotimes_{j<i<k} U f_i \otimes C^2_k e^1_k \otimes \bigotimes_{i>k} f_i$$

et

$$A_j(1)\,A_k(1) \bigotimes_{i=1}^{n} f_i = \bigotimes_{i<j} U U f_i \otimes D^2_j e^1_j \otimes \bigotimes_{j<i<k} U f_i \otimes C^2_k e^1_k \otimes \bigotimes_{i>k} f_i$$

Donc :

$$\left(A_j(1)\,A_k(1) + A_k(1)\,A_j(1)\right) \bigotimes_{i=1}^{n} f_i = 0$$

si $C^2_j U e^1_j + D^2_j e^1_j = 0$ (4-2-1)

2) *Etude de la deuxième relation*

Nous avons d'abord :

$$A^*_j(1)\,A_j(1) \bigotimes_{i=1}^{n} f_i = \bigotimes_{i<j} U^* U f_i \otimes C^2_j e^2_j \otimes \bigotimes_{i>j} f_i$$

$$A_j(1)\,A^*_j(1) \bigotimes_{i=1}^{n} f_i = \bigotimes_{i<j} U U^* f_i \otimes C^1_j e^1_j \otimes \bigotimes_{i>j} f_i$$

Donc :

$$\left(A^*_j(1)\,A_j(1) + A_j(1)\,A^*_j(1)\right) \bigotimes_{i=1}^{n} f_i = \bigotimes_{i=1}^{n} f_i$$

$$\text{si } U_i\,U^*_i = U^*_i\,U_i = 1 \quad (4\text{-}2\text{-}2)$$

Si, maintenant, nous supposons $j < k$, il vient :

$$A^*_k(1)\,A_j(1) \bigotimes_{i=1}^{n} f_i = A^*_k(1)\left(\bigotimes_{i<j} U_i\,f_i \otimes C^2_j\,e^1_j \otimes \bigotimes_{i>j} f_i\right)$$

$$= \bigotimes_{i<j} U_i\,U^*_i\,f_i \otimes C^2_j\,U^*_j\,e^1_j \otimes \bigotimes_{j<i<k} U^*_i\,f_i \otimes C^1_k\,e^2_k \otimes \bigotimes_{i>k} f_i$$

et

$$A_j(1)\,A^*_k(1) \bigotimes_{i=1}^{n} f_i$$

$$= \bigotimes_{i<j} U_i\,U^*_i\,f_i \otimes E^2_j\,e^1_j \otimes \bigotimes_{j<i<k} U^*_i\,f_i \otimes C^1_k\,e^2_k \otimes \bigotimes_{i>k} f_i$$

D'où :

$$\left(A^*_k(1)\,A_j(1) + A_j(1)\,A^*_k(1)\right) \bigotimes_{i=1}^{n} f_i = 0 \quad (j \neq k)$$

$$\text{si } C^2_j\,U^*_j\,e^1_j + E^2_j\,e^1_j = 0 \quad (4\text{-}2\text{-}3)$$

3) *Recherche de la forme des* U_i

Définissons chaque U_i par sa matrice dans la base $(e^1_i : e^2_i)$:

$$U_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix}$$

La relation (4-2-1) donne : $C^2_j\,(\alpha_j + \delta_j) + \gamma_j\,C^1_j = \gamma_j\,C^2_j = 0$

En combinant ces deux relations et en remarquant qu'elles doivent être vérifiées pour tous les j, on trouve :

$$\alpha_j = -\delta_j \; ; \; \beta_j = 0$$

En utilisant alors la relation (4-2-3), on trouve que :

$$\beta_j = \gamma_j = 0$$

D'autre part, les U_i doivent être unitaires, d'où :

$$|\alpha_i| = |\delta_i| = 1$$

Or, cette matrice diagonale n'est autre que la matrice de l'opérateur $e^{i\Theta_i}(1 - 2N_i)$ où $N_i = A^*_i\,A_i$.

LEMME 4-2-1. — *Soit* $\mathbf{H} = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathbf{H}_i$ *un espace produit tensoriel fini d'espaces de Hilbert à deux dimensions.*

Soit $\overline{a}_j$, $\overline{a^*}_j$ *et* $\overline{N}_j$ *les opérateurs définis au chapitre III.*

Les opérateurs de $\mathbf{L}(\mathbf{H})$ *définis par :*

$$A_j(1) = \prod_{i<j} e^{i\Theta_i} \overline{(1 - 2N)}_i \, e^{i\Theta_j} \overline{a}_j \prod_{i>j} e^{i\Theta_i}$$

$$A^*_j(1) = \prod_{i<j} e^{-i\Theta_i} \overline{(1 - 2N)}_i \, e^{-i\Theta_j} \overline{a^*}_j \prod_{i>j} e^{-i\Theta_i}$$

forment une représentation des relations d'anticommutation dans $\mathbf{H}$.

Si $f = \bigotimes_{i=1}^{n} (C^1_i e^1_i + C^2_i e^2_i) = \bigotimes_{i=1}^{n} f_i$

$$A_j(1) f = \bigotimes_{i<j} e^{i\Theta_i} (C^1_i e^1_i - C^2_i e^2_i) \otimes e^{i\Theta_j} C^2_j e^1_j \otimes \bigotimes_{i>j} e^{i\Theta_i} f_i$$

$$A^*_j(1) f =$$

$$= \bigotimes_{i<j} e^{-i\Theta_i} (C^1_i e^1_i - C^2_i e^2_i) \otimes e^{-i\Theta_j} C^1_j e^2_j \otimes \bigotimes_{i>j} e^{-i\Theta_i} f_i$$

4-3 Recherche des opérateurs de la représentation définis par A_j (2)

Les calculs se conduisent de façon tout à fait analogue. Nous nous contenterons de donner les résultats.

Posons :

$$f_i = C^1_i e^1_i + C^2_i e^2_i \; ; \quad V f_i = D^1_i e^1_i + D^2_i e^2_i \; ; \quad V^* f_i = E^1_i e^1_i + E^2_i e^2_i$$

Alors :

$$\left(A_j(2) A_k(2) + A_k(2) A_j(2)\right) = 0 \text{ si } C^2_k V_k e^1_k + D^2_k e^1_k = 0$$

$$\left(A^*_j(2) A_j(2) + A_j(2) A^*_j(2)\right) = 1 \text{ si } V^*_i V_i = V_i V^*_i = 1$$

$$\left(A_j(2) A^*_k(2) + A^*_k(2) A_j(2)\right) = 0 \; (j \neq k) \text{ si } C^1_k V^*_k e^2_k + E^1_k e^2_k = 0$$

Les relations qui définissent les V_i sont les mêmes que celles qui ont servi à définir les U_i au paragraphe précédent.

LEMME 4-3-1. — *Soit* $H = \bigotimes_{i=1}^{n} H_i$ *un espace produit tensoriel fini d'espaces de Hilbert à deux dimensions. Les opérateurs de* $L(H)$ *définis par :*

$$A_j(2) = \prod_{i<j} e^{i\Theta_i} \cdot e^{i\Theta_j} \overline{a}_j \prod_{i>j} e^{i\Theta_i} \overline{(1 - 2N)}_i$$

$$A^*_j(2) = \prod_{i<j} e^{-i\Theta_i} \cdot e^{-i\Theta_j} \overline{a^*}_j \prod_{i>j} e^{-i\Theta_i} \overline{(1 - 2N)}_i$$

où les $\overline{a}_j$, $\overline{a^*}_j$ *et* $\overline{N}_j$ *sont les opérateurs définis au chapitre III, forment une représentation des relations d'anticommutation dans* H.

Si $f = \bigotimes_{i=1}^{n} (C^1_i e^1_i + C^2_i e^2_i) = \bigotimes_{i=1}^{n} f_i$

$$A_j(2) f = \bigotimes_{i<j} e^{i\Theta_i} f_i \otimes e^{i\Theta_j} C^2_j e^1_j \otimes \bigotimes_{i>j} e^{i\Theta_i} (C^1_i e^1_i - C^2_i e^2_i)$$

$$A^*_j(2) f =$$

$$= \bigotimes_{i<j} e^{-i\Theta_i} f_i \otimes e^{-i\Theta_j} C^1_j e^2_j \otimes \bigotimes_{i>j} e^{-i\Theta_i} (C^1_i e^1_i - C^2_i e^2_i)$$

A partir de maintenant, pour alléger l'écriture, nous supprimerons les surlignages pour noter les extensions des opérateurs : il ne peut généralement pas avoir de confusion entre un opérateur et son extension.

CHAPITRE V

REPRESENTATIONS DANS LES PRODUITS INFINIS

Nous allons maintenant généraliser les résultats obtenus au chapitre précédent au cas des produits tensoriels infinis. Nous décomposerons cette étude en deux parties :

a) Représentations obtenues à partir des opérateurs $A_j(1)$;

b) Représentations obtenues à partir des opérateurs $A_j(2)$.

a) REPRESENTATIONS DEFINIES PAR LES OPERATEURS $A_j(1)$

5-1 Définition des opérateurs de la représentation

En généralisant ce que nous avons trouvé au chapitre précédent, définissons des opérateurs de $\mathbf{L}\left(\bigotimes_{i\in I} \mathbf{H}_i\right)$ par :

$$A_j(1) = \prod_{i<j} e^{i\Theta_i}\,(1 - 2N_i)\,.\,e^{i\Theta_j}\,a_j \,.\prod_{i>j} e^{i\Theta_i}$$

$$A_j^*(1) = \prod_{i<j} e^{-i\Theta_i}\,(1 - 2N_i)\,.\,e^{-i\Theta_j}\,a_j^* \,.\prod_{i>j} e^{-i\Theta_i}$$

c'est-à-dire que pour toute suite C_o $(f_i\ ;\ i \in I)$, nous pouvons écrire :

$$A_j(1)\bigotimes_{i\in I} f_i =$$

$$\bigotimes_{i<j} e^{i\Theta_i}\,(1 - 2N_i)\,f_i \otimes e^{i\Theta_j}\,a_j\,f_j \otimes \bigotimes_{i>j} e^{i\Theta_i} f_i = \bigotimes_{i\in I} g_i$$

$$A_j^*(1)\bigotimes_{i\in I} f_i =$$

$$\bigotimes_{i<j} e^{-i\Theta_i}\,(1 - 2N_i)\,f_i \otimes e^{-i\Theta_j}\,a_j^*\,f_j \otimes \bigotimes_{i>j} e^{-i\Theta_i} f_i =$$

$$= \bigotimes_{i\in I} h_i$$

Les deux suites $(g_i\ ;\ i \in I)$ et $(h_i\ ;\ i \in I)$ sont toutes deux des suites C_o car les deux séries $\sum_{i\in I} \left|\, \|g_i\| - 1 \,\right|$ et $\sum_{i\in I} \left|\, \|h_i\| - 1 \,\right|$ convergent.

Ces opérateurs sont donc parfaitement définis dans $L\left(\bigotimes_{i\varepsilon I} H_i\right)$.

D'autre part, on montre aisément en reprenant terme à terme les calculs faits au chapitre précédent que :

$$A_j(1)\,A_k(1) + A_k(1)\,A_j(1) = 0$$

$$A^*_j(1)\,A_k(1) + A_k(1)\,A^*_j(1) = \delta_{jk}$$

Nous pouvons donc dire que ces opérateurs forment une représentation des relations d'anticommutation dans l'espace produit tensoriel complet.

Il nous faut maintenant déterminer ceux des sous-espaces de $\bigotimes_{i\varepsilon I} H_i$ qui sont stables pour ces opérateurs.

En nous rappelant comment ont été définis les espaces $\bigotimes^{c}_{i\varepsilon I} H_i$ et $\bigotimes^{cw}_{i\varepsilon I} H_i$, il est clair que dans la recherche des sous-espaces stables, il nous faut distinguer deux cas :

— $\prod_{i\varepsilon I} e^{i\Theta_i} < +\infty$. Nous noterons alors $A_j(1,0)$ les opérateurs de la représentation et nous dirons que ces représentations appartiennent à la famille (1, 0).

— $\prod_{i\varepsilon I} e^{+i\Theta_i} = +\infty$. Nous noterons alors $A_j(1,\infty)$ les opérateurs de la représentation et nous dirons que ces représentations appartiennent à la famille $(1, \infty)$.

5-2 Représentation de la famille (1 ; 0)

$(f_i ; i \in I)$ étant une suite C_o, nous pouvons écrire :

$$A_j(1,0)\bigotimes_{i\varepsilon I} f_i =$$

$$= \prod_{i\varepsilon I} e^{i\Theta_i} \bigotimes_{i<j} (1 - 2N_i)\, f_i \otimes a_j\, f_j \bigotimes_{i>j} f_i = \bigotimes_{i\varepsilon I} g_i$$

$\prod e^{i\Theta_i}$ étant convergent, les deux suites $(f_i ; i \in I)$ et $(e^{i\Theta_i} f_i ; i \in I)$ sont fortement équivalentes. Les opérateurs

$$A'_j(1,0) = \prod_{i<j} (1 - 2N_i)\,.\,a_j$$

et

$$A_j(1,0) = \prod_{i<j} e^{i\Theta_i} (1 - 2N_i)\,.\,e^{i\Theta_j} a_j\,.\prod_{i>j} e^{i\Theta_i}$$

définissent évidemment deux représentations équivalentes. Nous pouvons donc nous contenter de définir les opérateurs de la famille (1, 0) par :

$$A_j(1,0) = \prod_{i<j} (1 - 2N_i)\,.\,a_j$$

D'autre part, les deux suites $(f_i ; i \in I)$ et $(g_i ; i \in I)$ qui interviennent au début de ce paragraphe ne différant que pour un nombre fini de i sont fortement équivalentes. Chacun des espaces $\bigotimes^{C}_{i \in I} H_i$ est donc stable par les opérateurs $A_j (1 ; 0)$.

THEOREME I. — *Soient les opérateurs de* $\mathbf{L}\left(\bigotimes^{C}_{i \in I} H_i\right)$ *définis par :*

$$A_j (1 ; 0) = \prod_{i<j} (1 - 2N_i) \cdot a_j$$

$$A^*_j (1 ; 0) = \prod_{i<j} (1 - 2N_i) \cdot a^*_j$$

Ils constituent une représentation des relations d'anticommutation dans ces espaces produits.

Si $f = \bigotimes_{i \in I} f_i = \bigotimes_{i \in I} (C^1_i e^1_i + C^2_i e^2_i)$

$$A_j (1 ; 0) f = \bigotimes_{i<j} (C^1_i e^1_i - C^2_i e^2_i) \otimes C^2_j e^1_j \otimes \bigotimes_{i>j} f_i$$

$$A^*_j (1 ; 0) f = \bigotimes_{i<j} (C^1_i e^1_i - C^2_i e^2_i) \otimes C^1_j e^2_j \otimes \bigotimes_{i>j} f_i$$

DEFINITION 5-2-1. — *Les représentations définies au théorème 1 seront appelées représentations de la famille (1 ; 0).*

5-3 Représentation de la famille (1 ; ∞)

Nous avons pour toute suite $(f_i = C^1_i e^1_i + C^2_i e^2_i ; i \in I)$:

$$A_j (1 ; \infty) \bigotimes_{i \in I} f_i =$$

$$= \bigotimes_{i<j} e^{i\Theta_i} (C^1_i e^1_i - C^2_i e^2_i) \otimes e^{i\Theta_j} C^2_j e^1_j \otimes \bigotimes_{i>j} e^{i\Theta_i} f_i =$$

$$= \bigotimes_{i \in I} g_i$$

Les deux suites $(f_i ; i \in I)$ et $(g_i ; i \in I)$ ne sont plus fortement équivalentes mais seulement faiblement équivalentes car il est facile de voir que :

$$\sum_{i \in I} |(f_i, g_i) - 1| = +\infty \text{ alors que } \sum_{i \in I} |(f_i, g_i)| - 1| < +\infty$$

Les représentations semblent se réaliser dans les espaces produits faiblement incomplets. Mais nous allons voir qu'il existe des sous-espaces de ces espaces qui sont stables pour les opérateurs de la représentation.

En effet, un opérateur $A_j (1 ; \infty)$ applique le produit $\bigotimes^{C}_{i \in I} H_i$ où C représentée par une suite $(f_i ; i \in I)$ sur le produit $\bigotimes^{D}_{i \in I} H_i$ où D est

représentée par la suite $(e^{i\Theta_i} f_i ; i \in I)$. Deux cas sont alors possibles :

1) Il existe un entier P tel que $\Theta_i = 2 K_i \Pi/P$ (K_i entier). Alors, l'espace $\bigoplus_{k=0}^{P-1} (\bigotimes_{i\in I} C^k_i \mathcal{H}_i)$ où C^0 est une classe engendrée par une suite $(f_i ; i \in I)$ et C^k la classe engendrée par la suite $(e^{ik\Theta_i} f_i)$ est stable pour les opérateurs de la représentation.

Il faut remarquer que cette condition sur les Θ_i n'est pas incompatible avec la condition $\prod_{i\in I} e^{i\Theta_i} = \infty$. En effet, pour que $\prod_{i\in I} e^{i\Theta_i}$ diverge, il suffit que les K_i soient tels que $\sum_{i\in I} |K_i| = \infty$.

2) Il n'existe pas de nombre P vérifiant la condition 1). Alors, l'espace $\bigoplus_{k=0}^{\infty} (\bigotimes_{i\in I} C^k_i \mathcal{H}_i)$, où les C^k sont définies comme en 1), est stable pour les opérateurs de la représentation.

THEOREME II. — *Considérons les opérateurs de* $\mathcal{L}(\bigotimes_{i\in I} \mathcal{H}_i)$ *définis par :*

$$A^*_j(1;\infty) = \prod_{i<j} e^{-i\Theta_i} (1 - 2N_i) \cdot e^{-i\Theta_j} A^*_j \cdot \prod_{i>j} e^{-i\Theta_i}$$

$$A_j(1;\infty) = \prod_{i<j} e^{i\Theta_i} (1 - 2N_i) \cdot e^{i\Theta_j} A_j \cdot \prod_{i>j} e^{i\Theta_i}$$

Soit C^0 *une classe d'équivalence forte représentée par une suite* $(f_i ; i \in I)$ *et* C^k *la classe d'équivalence forte représentée par la suite* $(e^{ik\Theta_i} f_i ; i \in I)$.

1) *S'il existe un entier* P *tel que* $\Theta_i = 2 K_i \Pi/P$ (K_i *entier), la représentation se réalise dans l'espace* $\bigoplus_{k=0}^{P-1} (\bigotimes_{i\in I} C^k_i \mathcal{H}_i)$.

2) *Si ce nombre* P *n'existe pas, la représentation se réalise dans l'espace* $\bigoplus_{k=0}^{\infty} (\bigotimes_{i\in I} C^k_i \mathcal{H}_i)$.

3) *Dans les cas* 1) *et* 2), *nous avons si :*

$$f = \bigotimes_{i\in I} f_i = \bigotimes_{i\in I} (C^1_i e^1_i + C^2_i e^2_i)$$

$$A_j(1;\infty) f = \bigotimes_{i<j} e^{i\Theta_i} (C^1_i e^1_i - C^2_i e^2_i) \otimes e^{i\Theta_j} C^2_j e^1_j \otimes \bigotimes_{i>j} e^{i\Theta_i} f_i$$

$$A^*_j(1\ ;\ \infty)\ f =$$

$$= \bigotimes_{i<j} e^{-i\Theta i}\ (C^1_i\ e^1_i - C^2_i\ e^2_i) \bigotimes e^{-i\Theta j}\ C^1_j\ e^2_j \bigotimes_{i>j} e^{-i\Theta i} f_i$$

DEFINITION 5-3-1. — a) *Les représentations définies au théorème II* 1) *forment la famille de représentations* $(1\ ;\ \infty\ ;\ I)$ *et les opérateurs seront notés* $A_j\ (1\ ;\ \infty\ ;\ I)$.

b) *Les représentations définies au théorème II* 2) *forment la famille de représentations* $(1\ ;\ \infty\ ;\ II)$ *et les opérateurs seront notés* $A_j\ (1\ ;\ \infty\ ;\ II)$.

b) REPRESENTATIONS DEFINIES PAR LES OPERATEURS $A_j\ (2)$

5-4 Définition des opérateurs de la représentation

Nous allons procéder comme au paragraphe 5-1. Définissons dans $\bigotimes_{i\varepsilon I} H_i$ des opérateurs $A_j\ (2)$ par :

$$A_j\ (2) = \prod_{i<j} e^{i\Theta i} \cdot e^{i\Theta j}\ a^*_j \cdot \prod_{i>j} e^{i\Theta i}\ (1 - 2N_i)$$

$$A^*_j\ (2) = \prod_{i<j} e^{-i\Theta i} \cdot e^{-i\Theta j}\ a^*_j \cdot \prod_{i>j} e^{-i\Theta i}\ (1 - 2N_i)$$

de sorte que pour toute suite $(f_i\ ;\ i \in I)$, nous avons :

$$A_j\ (2) \bigotimes_{i\varepsilon I} f_i =$$

$$= \bigotimes_{i<j} e^{i\Theta i} f_i \bigotimes e^{i\Theta j}\ a\ f_j \bigotimes_{i>j} e^{i\Theta i}\ (1 - 2N_i)\ f_i = \bigotimes_{i\varepsilon I} g_i$$

$$A^*_j\ (2) \bigotimes_{i\varepsilon I} f_i =$$

$$= \bigotimes_{i<j} e^{-i\Theta i} f_i \bigotimes e^{-i\Theta j}\ a^*\ f_j \bigotimes_{i>j} e^{-i\Theta i}\ (1 - 2N_i)\ f_i =$$

$$= \bigotimes_{i\varepsilon I} h_i$$

Les deux suites $(g_i\ ;\ i \in I)$ et $(h_i\ ;\ i \in I)$ sont deux suites C_o car les deux séries $\sum_{i\varepsilon I} |\ \|g_i\| - 1\ |$ et $\sum_{i\varepsilon I} |\ \|h_i\| - 1\ |$ convergent. Les opérateurs $A_j\ (2)$ sont donc parfaitement définis en tant qu'opérateurs de $\bigotimes_{i\varepsilon I} H_i$.

D'autre part, on montre en reprenant terme à terme les calculs faits au chapitre précédent que :

$$A_j\ (2)\ A_k\ (2) + A_k\ (2)\ A_j\ (2) = 0$$

$$A^*_j\ (2)\ A_k\ (2) + A_k\ (2)\ A^*_j\ (2) = \delta_{jk}$$

Nous pouvons donc dire que ces opérateurs forment une représentation des relations d'anticommutation dans $\bigotimes_{i\varepsilon I} H_i$.

Il nous faut maintenant voir quels sont les sous-espaces de $\bigotimes_{i \in I} H_i$ qui sont stables pour ces opérateurs. Nous distinguerons encore deux cas :

1) $\prod_{i \in I} e^{i\Theta_i} < \infty$ et nous noterons $A_j(2\,;0)$ les opérateurs de la représentation qui appartiendra à la famille $(2\,;0)$.

2) $\prod_{i \in I} e^{i\Theta_i} = \infty$ et nous noterons $A_j(2\,;\infty)$ les opérateurs de la représentation qui appartiendra à la famille $(2\,;\infty)$.

La recherche de ces sous-espaces invariants sera directement liée à l'équivalence forte, faible ou à la non-équivalence des deux suites $(f_i\,;i \in I)$ et $(g_i\,;i \in I)$ dont il a été question ci-dessus. Nous allons voir que cette famille de représentations nous conduit à distinguer plus de sous-espaces stables que la famille (1).

5-5 Représentation de la famille $(2\,;0)$

Les opérateurs $A_j(2\,;0)$ appliquent un espace $\bigotimes_{i \in I}^{C} H_i$ où C est représenté par une suite $(f_j\,;i \in I)$ sur l'espace $\bigotimes_{i \in I}^{D} H_i$ où D est représenté par la suite $\left((1-2N_i)\,f_i\,;i \in I\right)$ Nous supposerons dans tout ce paragraphe que $f_i = C_i^1 e_i^1 + C_i^2 e_i^2\,;\ \|f_i\| = 1$.

Trois cas sont à distinguer :

1) Les deux suites (f_i) et $\left((1-2N_i)\,f_i\right)$ sont fortement équivalentes. Cela aura lieu si et seulement si la série $\sum_{i \in I} |C_i^2|^2$ converge. Mais $1-|C_i^1| < 1-|C_i^1|^2 = |C_i^2|^2$ (car $|C_i^1| < 1$) ; alors, la série $\sum_I (1-|C_i^1|)$ converge, ce qui revient à dire que la suite $(f_i\,;i \in I)$ est faiblement équivalente à la suite $(e_i^1\,;i \in I)$. Dans ce cas, les représentations se réalisent dans les espaces $\bigotimes_{i \in I}^{C} H_i$ où toutes les classes C sont faiblement équivalentes à la classe faible qui contient $(e_i^1\,;i \in I)$.

2) Les deux suites $(f_i\,;i \in I)$ et $\left((1-2N_i)\,f_i\,;i \in I\right)$ ne sont que faiblement équivalentes. Cela aura lieu si et seulement si la série $\sum_i \left|\,|C_i^1|^2 - |C_i^2|^2 - 1\,\right|$ converge.

Posons :

$$a_i = \left| \, | C^1_i |^2 - | C^2_i |^2 \, | - 1 \, \right| = \left| \, 1 - 2 | C^2_i |^2 | - 1 \right|$$

Si $1 - 2 | C^2_i |^2 \geqslant 0$ $\qquad a_i = 2 | C^2_i |^2$

Si $1 - 2 | C^2_i |^2 < 0$ $\qquad a_i = 2 | C^1_i |^2$

Soit alors I_1 l'ensemble des i de I tels que $| C^2_i |^2 \leqslant \frac{1}{2}$ et I_2 l'ensemble des i de I tels que $| C^2_i |^2 > \frac{1}{2}$.

La convergence de la série $\sum_{i \in I} a_i$ est équivalente à la convergence des deux séries $\sum_{I_1} | C^2_i |^2$ et $\sum_{I_2} | C^1_i |^2$

Or :

$$1 - | C^1_i | < 1 - | C^1_i |^2 = | C^2_i |^2$$

$$1 - | C^2_i | < 1 - | C^2_i |^2 = | C^1_i |^2$$

Donc la série $\sum_{I_1} (1 - | C^1_i |) + \sum_{I_2} (1 - | C^2_i |)$ converge.

Ceci revient à dire que la suite $(f_i \, ; \, i \in I)$ est faiblement équivalente à la suite $(e_i^{\alpha_{i+1}} \, ; \, i \in I)$ ($\alpha_i = 0$ pour $i \in I_2$; $\alpha_i = 1$ pour $i \in I_2$).
La représentation se réalise alors dans l'espace somme directe : $\bigotimes_{i \in I}^{C} H_i \oplus \bigotimes_{i \in I}^{D} H_i$ où C et D appartiennent à la classe d'équivalence faible de la suite $(e_I^{\alpha_{i+1}})$. Le fait que l'espace de la représentation soit somme directe de deux espaces produits fortement incomplets provient du fait que $(1 - 2N_i)(1 - 2N_i) = 1$.

3) Les deux suites $(f_i \, ; \, i \in I)$ et $(1 - 2N_i) f_i \, ; \, i \in I$ ne sont ni fortement ni faiblement équivalentes. La représentation se réalise dans l'espace $\bigotimes_{i \in I}^{C} H_i \oplus \bigotimes_{i \in I}^{D} H_i$ où C et D sont définies comme en 2).
Ici, ces deux classes ne sont pas faiblement équivalentes.

THEOREME III. — *Dans l'espace* $\bigotimes_{i \in I} H_i$, *définissons les opérateurs* A_j (2 ; 0) *par :*

$$A_j(2;0) = a_j \cdot \prod_{i>j} (1-2N_i)$$

$$A_j^*(2;0) = a_j^* \cdot \prod_{i>j} (1-2N_i)$$

Dans chaque classe d'équivalence $\mathbf{C}$, *considérons la suite* $(f_i = C_i^1 e_i^1 + C_i^2 e_i^2 ; i \in I) \qquad \| f_i \| = 1$

Appelons I_1 *l'ensemble des* i *de* I *tels que* $|C_i^2|^2 \leqslant \frac{1}{2}$ *et* I_2 *l'ensemble des* i *de* I *tels que* $|C_i^2|^2 > \frac{1}{2}$. $\mathbf{D}$ *sera la classe forte représentée par la suite* $\left((1-2N_i) f_i ; i \in I\right)$

1) *Si la classe* $\mathbf{C}$ *est telle que* $\sum_i |C_i^2|^2 < \infty$, *les opérateurs* $A_j(2;0)$ *sont une représentation dans l'espace* $\bigotimes_{i\in I}^{\mathbf{C}} H_i$. *La classe* $\mathbf{C}$ *est alors faiblement équivalente à la classe faible qui contient la suite* $(e_i^1 ; i \in I)$.

2) *Si la classe* $\mathbf{C}$ *est telle que* $\sum_{I_1} |C_i^1|^2 + \sum_{I_2} |C_i^2|^2 < \infty$, *les opérateurs* $A_j(2;0)$ *sont une représentation dans l'espace* $\bigotimes_{i\in I}^{\mathbf{C}} H_i \oplus \bigotimes_{i\in I}^{\mathbf{D}} H_i$. *Les deux classes* $\mathbf{C}$ *et* $\mathbf{D}$ *sont faiblement équivalentes à la classe faible qui contient la suite* $(e_i^{\alpha_i+1} ; i \in I)$ *où* $\alpha_i = 0$ *pour* $i \in I_1$, $\alpha_i = 1$ *pour* $i \in I_2$.

3) *Si aucune des deux conditions* 1) *et* 2) *n'est réalisée, les opérateurs* $A_j(2;0)$ *sont une représentation dans l'espace* $\bigotimes_{i\in I}^{\mathbf{C}} H_i \oplus \bigotimes_{i\in I}^{\mathbf{D}} H_i$.

Mais ici, les deux classes $\mathbf{C}$ *et* $\mathbf{D}$ *ne sont pas faiblement équivalentes.*

DEFINITION 5-5-1. — 1) *Les représentations définies au théorème III* 1) *forment la famille* $(2;0;I)$ *et les opérateurs seront notés* $A_j(2;0;I)$.

2) *Les représentations définies au théorème III* 2) *forment la famille* $(2;0;II)$ *et les opérateurs seront notés* $A_j(2;0;II)$.

3) *Les représentations définies au théorème III* 3) *forment la famille* $(2;0;III)$ *et les opérateurs seront notés* $A_j(2;0;III)$.

5-6 Représentation de la famille (2 ; ∞)

Un opérateur $A_j(2;\infty)$ applique la classe forte représentée par une suite $(f_i\ ;\ i \in I)$ sur la classe forte représentée par la suite $(e^{i\Theta i}(1-2N)\ f\ ;\ i \in I)$. C'est encore les relations d'équivalence fortes ou faibles qui peuvent exister entre ces deux suites qui vont nous permettre de déterminer les espaces stables pour les $A_j(2;\infty)$.

1) $(f_i) \approx (e^{i\Theta i}(1-2N)\ f_i)$

On a alors une représentation dans un espace $\bigotimes^{C}_{i\varepsilon I} H_i$.

2) $(f_i) \approx_w (e^{i\Theta i}(1-2N)\ f_i)$

Soit C une classe d'équivalence forte. Définissons deux ensembles d'indices comme au théorème III (soit I_1 et I_2). On voit que la classe C est faiblement équivalente à la classe faible contenant la suite $(e^{\alpha}_{i+1}\ ;\ i \in I)$ telle qu'elle a été définie au théorème III.

Remarquons qu'en appliquant 2k fois l'opérateur $A_j(2;\infty)$ à une suite $(f_i\ ;\ i \in I)$, on tombe sur la suite $(e^{i\,2k\Theta i} f_i\ ;\ i \in I)$.

Et qu'en appliquant $(2k-1)$ fois le même opérateur à la même suite, on tombe sur la suite $(e^{i(2k-1)\Theta i}(1-2N)\ f_i\ ;\ i \in I)$.

Supposons qu'il existe un entier P tel que $\Theta_i = 2K_i\ \Pi/P$ (K_i entier). Alors la représentation se réalise dans l'espace $\bigoplus_{k=0}^{2p-1} (\bigotimes^{Ck}_{i\varepsilon I} H_i)$ où si C° est une classe représentée par une suite $(f_i\ ;\ i \in I)$, C^{2k} est la classe représentée par la suite $(e^{i2k\Theta i} f_i\ ;\ i \in I)$ et C^{2k-1} la classe représentée par la suite $e^{i(2k-1)\Theta i}(1-2N)\ f_i\ ;\ i \in I)$.

Il faut remarquer que les classes C^{2k} et C^{2k-1} sont faiblement équivalentes pour tout k.

3) $(f_i) \not\approx \left((1-2N_i)\ e^{i\Theta i} f_i\right)$

Il est facile de voir que, dans ce cas, nous obtenons des résultats analogues à ceux du cas 2). La seule différence est que les classes C^{2k} sont faiblement équivalentes, les classes C^{2k+1} aussi mais les classes C^{2k} et les classes C^{2k+1} ne sont plus faiblement équivalentes.

THEOREME IV. — *Les notations pour* I_1, I_2 *et pour la suite* (α) *sont les mêmes qu'au théorème III.*

$\mathbf{C}^{\circ}$ *est la classe engendrée par la suite* $(f_i\ ;\ i \in I)$. $\mathbf{C}^{2k}$ *est la classe engendrée par la suite* $(e^{2ik\Theta_i} f_i\ ;\ i \in I)$. $\mathbf{C}^{2k+1}$ *est la classe engendrée par la suite* $(e^{i(2k-1)\Theta_i}(1-2N_i) f_i)$.

Définissons dans $\mathbf{L}(\bigotimes_{i\in I} \mathbf{H}_i)$ *les opérateurs :*

$$A_j(2;\infty) = \prod_{i<j} e^{i\Theta_i} \cdot e^{i\Theta_j} a_j \cdot \prod_{i>j} (1-2N_i) e^{i\Theta_i}$$

$$A_j^*(2;\infty) = \prod_{i<j} e^{-i\Theta_i} \cdot e^{-i\Theta_j} a_j^* \cdot \prod_{i>j} e^{-i\Theta_i}(1-2N_i)$$

1) $(f_i) \approx (e^{i\Theta_i}(1-2N_i) f_i)$

Nous obtenons des représentations dans les espaces $\bigotimes^{\mathbf{C}}_{i\in I} \mathbf{H}_i$.

2) $(f_i) \underset{w}{\approx} (e^{i\Theta_i}(1-2N_i) f_i)$

S'il existe un entier P *tel que* $\Theta_i = 2K_i \Pi/P$ *(*K *entier), la représentation se réalise dans l'espace* $\bigoplus_{k=0}^{2P-1} (\bigotimes^{\mathbf{C}^k}_{i\in I} \mathbf{H}_i)$.

Si ce nombre P *n'existe pas, la représentation se réalise dans* $\bigoplus_{k=0}^{\infty} (\bigotimes^{\mathbf{C}^k}_{i\in I} \mathbf{H}_i)$.

Dans les deux cas, les classes $\mathbf{C}^{2k}$ *et* $\mathbf{C}^{2k-1}$ *sont toutes faiblement équivalentes à la classe faible qui contient la suite* $(e^{\alpha_{i+1}}_{I}\ ;\ i \in I)$.

3) *Nous obtenons les mêmes résultats qu'en* 2). *Mais si les* $\mathbf{C}^{2k}$ *sont faiblement équivalentes entre elles, les* $\mathbf{C}^{2k+1}$ *aussi, les* $\mathbf{C}^{2k}$ *et* $\mathbf{C}^{2k+1}$ *ne sont pas faiblement équivalentes entre elles.*

DEFINITION 5-6-1. — 1) *Les représentations du théorème IV* 1) *forment la famille* $(2\ ;\ \infty\ ;\ I)$ *et les opérateurs seront notés* $A_j(2\ ;\ \infty\ ;\ I)$.

2) *Celles du cas 2* 1) *forment la famille* $(2\ ;\ \infty\ II)$ *et les opérateurs seront notés* $A_j(2\ ;\ \infty\ ;\ II)$.

3) *Celles du cas 2* 2) *forment la famille* $(2\ ;\ \infty\ ;\ III)$ *et les opérateurs notés* $A_j(2\ ;\ \infty\ ;\ III)$.

4) *Celles du cas 3* 1) *forment la famille* $(2\ ;\ \infty\ ;\ IV)$ *et les opérateurs notés* $A_j(2\ ;\ \infty\ ;\ IV)$.

5) *Celles du cas 3* 2) *forment la famille* $(2\ ;\ \infty\ ;\ V)$ *et les opérateurs notés* $A(2\ ;\infty\ ;\ V)$.

Nous avons donc défini un certain nombre de représentations dans divers espaces. Il nous faut maintenant étudier les propriétés de ces opérateurs. Nous allons rechercher en premier lieu s'il existe un rapport entre les représentations qui sont données par Wightmann et Schweber [7] et les représentations que nous venons de définir.

CHAPITRE VI

REPRESENTATIONS DISCRETES ET REPRESENTATIONS CONTINUES

6-1 Remarque préliminaire

Nous allons montrer que certaines de nos représentations sont identiques aux représentations discrètes introduites par Wightmann et Schweber dont nous commencerons par rappeler la construction. Posons la définition :

DEFINITION 6-6-1. — *Deux suites* $(\alpha) : (\beta_i)$ *et* (γ_i) *seront dites équivalentes si et seulement si* $\beta_i \neq \gamma_i$ *pour un nombre fini de* i *seulement. Les classes d'équivalence de cette relation seront notées* $[\alpha]$.

Les vecteurs de l'espace de la représentation discrète attachée à une classe d'équivalence $[\alpha]$ sont des suites de nombres complexes $f(\beta)$ où β parcourt la classe $[\alpha]$, les opérateurs de la représentation étant donnés par :

$$(a_j f)(\beta) = (1 - \beta'_j)\, l_j(\beta)\, f(\beta')$$

$$(a^*_j f)(\beta) = \beta'_j\, l_j(\beta)\, f(\beta')$$

Où :

$$\beta_i = \beta'_i \quad \text{pour tout } i \neq j \qquad \beta'_j = 1 - \beta_j$$

$$l_j(\beta) = \exp.\left(i \prod_{k=1}^{j-1} \Sigma\, \beta_k\right)$$

Wightmann et Schweber montrent ensuite que toute représentation discrète est somme directe de représentations irréductibles équivalentes entre elles.

Revenons maintenant à nos représentations. La façon dont ont été définis les opérateurs N_i permet d'écrire pour une suite (α) donnée :

$$\text{Si } \alpha = 0 \qquad (1 - N)^{1-\alpha_i} e^{\alpha_{i+1}}_i = e^{\alpha_{i+1}}_i$$

$$\text{Si } \alpha = 1 \qquad N^{\alpha_i} e^{\alpha_{i+1}}_i = e^{\alpha_{i+1}}_i$$

Considérons un espace $\bigotimes_{i \in I}^{C} H_i$ où C est représentée par une suite $(e_i^{\beta_{i+1}} ; i \in I)$.

Une base de cet espace va être constituée par l'ensemble des vecteurs $e_{(\beta)} = \bigotimes_{i \in I} e_i^{\beta_{i+1}}$ où toutes les suites $(\beta_i ; i \in I)$ appartiennent à une même classe $[\alpha]$. Nous pouvons alors écrire :

$$A_j(1;0) \bigotimes_{i \in I} e_i^{\gamma_{i+1}} =$$

$$= \bigotimes_{i<j} (1-2N_i)\, e_i^{\gamma_{i+1}} \otimes e_j^{\gamma_{j+1}} \otimes \bigotimes_{i>j} a_j\, e_j^{\gamma_{j+1}}$$

Or :

$$\text{Si } \gamma_j = 0 \quad \beta_j = 1 \quad (1-\beta_j)\, e_j^{\beta_{j+1}} = 0 = a_j\, e_j^1 = a_j\, e_j^{\gamma_{j+1}}$$

$$\text{Si } \gamma_j = 1 \quad \beta_j = 0 \quad (1-\beta_j)\, e_j^{\beta_{j+1}} = e_j^1 = a_j\, e_j^2 = a_j\, e_j^{\gamma_{j+1}}$$

$$(1-2N_i)\, e_i^{\gamma_{i+1}} = e^{i\Pi\gamma_i}\, e_i^{\gamma_{i+1}}$$

Donc, nous obtenons :

$$A_j(1;0) \bigotimes_{i \in I} e_i^{\gamma_{i+1}} =$$

$$= \bigotimes_{i<j} e^{i\Pi\gamma_i}\, e_i^{\gamma_{i+1}} \otimes (1-\beta_j)\, e_j^{\gamma_{j+1}} \otimes \bigotimes_{i>j} e_i^{\gamma_{i+1}}$$

Soit :

$$A_j(1;0) \bigotimes_{i \in I} e_i^{\gamma_{i+1}} = (1-\beta_j)\, I_j(\beta) \bigotimes_{i \in I} e_i^{\beta_{i+1}}$$

où $\beta_i = \gamma_i$ pour tout $i \neq j$ $\quad \beta_j = 1 - \gamma_j$

$$I_j(\beta) = \exp.\left(i\Pi \sum_{k=1}^{j-1} \beta_k\right)$$

Nous obtenons donc des résultats identiques à ceux de Wightmann et Schweber.

D'autre part, une base de l'espace des représentations de Wightmann et Schweber peut être constituée par l'ensemble des vecteurs :

$$e_{(\beta)}^{(\beta^\circ)} = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta \neq \beta^\circ \\ 1 & \text{si } \beta = \beta^\circ \end{cases}$$

En faisant correspondre au vecteur $e^{(\beta^\circ)}_{(\beta)}$ le vecteur $\bigotimes_{i \in I} e^{\beta^\circ}_{i+1\ i}$ nous définissons un isomorphisme entre les deux espaces de représentations.

Nous avons donc démontré l'égalité ds opérateurs des représentations sur un ensemble totalisateur de vecteurs. Ces opérateurs étant bornés, ils sont égaux pour tous vecteurs.

Nous venons donc de voir que certaines de nos représentations sont identiques aux représentations discrètes de Wightmann et Schweber. Nous pouvons alors nous demander si nous en avons obtenu d'autres qui seraient continues. Ce qui revient, dans notre formalisme, à rechercher une caractérisation des représentations discrètes et continues.

Pour cela, nous devons étudier les propriétés des projecteurs $E_{(\alpha)}$ dans les espaces où nous nous sommes placés.

6-2 Etude de l'opérateur $6_{(\alpha)}$ dans un espace $\bigotimes_{i \in I} H_i$

Remarquons que les opérateurs $E_{(\alpha)}$ définis à partir des représentations de la famille (1) et des représentations de la famille (2) sont formellement les mêmes car nous avons pour tout j :

$$N_j\ (1) = N_j\ (2) = N_j$$

Nous allons chercher une condition nécessaire et suffisante pour que $E_{(\alpha)}$ soit nul pour toute suite (α) sur les espaces des représentations. L'opérateur $E_{(\alpha)}$ étant borné et les vecteurs $\bigotimes_{i \in I} f_i$ étant totalisateurs dans les espaces $\bigotimes^{c}_{i \in I} H_i$, nous pouvons nous contenter d'étudier la nullité de ces $E_{(\alpha)}$ sur des éléments de la forme $\bigotimes_{i \in I} f_i$.

Soit alors $(f_i = C^1_i e^1_i + C^2_i e^2_i\ ;\ i \in I)$ $(\| f_i \| = 1)$ une suite C_0.

$$E_{(\alpha)} \bigotimes_{i \in I} f_i = \bigotimes_{i \in I} N_i^{\alpha_i} (1 - N_i)^{1 - \alpha_i} f_i$$

et $E_{(\alpha)} \bigotimes_{i \in I} f_i = 0$ si et seulement si :

ou 1) il existe au moins un i tel que $N_i^{\alpha_i} (1 - N_i)^{1 - \alpha_i} f_i = 0$

ou 2) $\| E_{(\alpha)} \bigotimes_{i \in I} f_i \|^2 = 0$ et $N_i^{\alpha_i} (1 - N_i)^{1 - \alpha_i} f_i \neq 0$

pour tout i.

1) *Il existe au moins un* i *tel que* $N_i^{\alpha_i}(1-N_i)^{1-\alpha_i} f_i = 0$

Remarquons que $N_i^{\alpha_i}(1-N_i)^{1-\alpha_i} f_i = 0$ entraîne

$f_i = z_i e^1$ si $\alpha_i = 1$ et $f_i = z_i e^2$ si $\alpha_i = 0$ (z_i complexe).

Si ces i sont en nombre fini, nous pouvons remplacer la suite $(f_i ; i \in I)$ par une suite fortement équivalente en modifiant convenablement les f_i se rapportant aux indices litigieux. On obtient ainsi une nouvelle suite $(g_i ; i \in I)$ pour laquelle $N_i^{\alpha_i}(1-N_i)^{1-\alpha_i} g_i \neq 0$ pour tous les i de I. Ce qui nous ramène au cas 2).

Si, maintenant, ces indices sont en nombre infini, décomposons I en deux sous-ensembles disjoints I_1 et I_2 par :

I_1 est l'ensemble des i de I tels que $N_i^{\alpha_i}(1-N_i)^{1-\alpha_i} f_i = 0$

I_2 est l'ensemble des i de I tels que $N_i^{\alpha_i}(1-N_i)^{1-\alpha_i} f_i \neq 0$

Pour tous les i de I_1, définissons des β_i par $\beta_i = 1-\alpha_i$.

Alors : $N_i^{\beta_i}(1-N_i)^{1-\beta_i} f_i \neq 0$.

Nous pouvons alors considérer la suite $(\gamma_i ; i \in I)$ définie par :

$\gamma_i = \beta_i$ pour $i \in I_1$ $\qquad$ $\gamma_i = \alpha_i$ pour $i \in I_2$

et ainsi $N_i^{\gamma_i}(1-N_i)^{1-\gamma_i} f_i \neq 0$ pour tout i de I.

LEMME 6-2-1. — *Dans l'étude de la nullité des* $E_{(\alpha)} \otimes_{i \in I} f_i$ *pour toutes les suites* C_0 *d'une même classe forte* C *et pour toutes les suites* (α), *nous pouvons par la modification de la suite* $(f_i ; i \in I)$ *ou de la suite* (α) *nous ramener au cas où* $N_i^{\alpha_i}(1-N_i)^{1-\alpha_i} f_i \neq 0$ *pour tout* i, *c'est-à-dire que nous nous ramenons au cas* 2.

Etude du cas 2)

La suite $(f_i ; i \in I)$ est définie comme en 1). Pour chaque suite (α), définissons deux ensembles d'indices I_1 et I_2 par :

I_1 est l'ensemble des i de I tels que $\alpha_i = 0$

I_2 est l'ensemble des i de I tels que $\alpha_i = 1$

Les N_j étant des projecteurs commutants :

$$\left[N_j, 1 - N_k\right]_- = \left[1 - N_j, 1 - N_k\right]_- = 0$$

L'ordre des éléments de I ne jouant aucun rôle, nous pouvons écrire :

$$E_{(\alpha)} = \prod_{i \in I_1} (1 - N_i) \prod_{i \in I_2} N_i$$

D'où : $\| E_{(\alpha)} \otimes_{i \in I} f_i \|^2 = \prod_{I_1} |C_i^1|^2 \prod_{I_2} |C_i^2|^2$

Nous allons démontrer que :

$$\| E_{(\alpha)} \otimes_{i \in I} f_i \|^2 \neq 0 \leftrightarrow \sum_{I_1} (1 - |C_i^1|^2) + \sum_{I_2} (1 - |C_i^2|^2) = \infty$$

Pour ce faire, posons :

$$\lambda^2 = \begin{cases} |C_i^1|^2 & \text{pour } i \in I_1 \\ |C_i^2|^2 & \text{pour } i \in I_2 \end{cases}$$

Alors :

$$\| E_{(\alpha)} \otimes_{i \in I} f_i \| = \prod_I \lambda_i^2$$

Si $\| E_{(\alpha)} \otimes_{i \in I} f_i \|^2 = 0$, alors $\prod_I \lambda_i^2 = 0$

et la série $\sum_i (1 - \lambda_i^2)$ diverge (les λ_i étant tous non nuls) [voir appendice A], donc :

$$\sum_{I_1} (1 - |C_i^1|^2) + \sum_{I_2} (1 - |C_i^2|^2) = \infty$$

Si $\sum_{I_1} (1 - |C_i^1|^2) + \sum_{I_2} (1 - |C_i^2|^2) = \infty$, c'est que l'une au moins de ces deux séries diverge.

Supposons par exemple $\sum_{I_1} (1 - |C_i^1|^2) = \infty$.

Alors $\sum_{I_1} |C_i^1|^2 = 0$ et $\| E_{(\alpha)} \otimes_{i \in I} f_i \|^2 = 0$.

LEMME 6-6-2. — *Soit* $(f_i ; i \in I)$ *une suite* C_0 *telle que pour tout* i :

$$f_i = C^1_i e^1_i + C^2_i e^2_i \qquad \| f_i \| = 1.$$

Soit $(\alpha_i ; i \in I)$ *une suite* (α) *telle que :*

$$\alpha_i = 0 \text{ pour } i \in I_1 \qquad \alpha_i = 1 \text{ pour } i \in I_2$$

Pour que $E_{(\alpha)} \otimes_{i \in I} f_i$ *soit nul, nous avons l'alternative :*

1) $C^1_i = 0$ *pour tout* i *de* I_1

ou $C^2_i = 0$ *pour tout* i *de* I_2

2) $\sum_{I_1} (1 - |C^1_i|^2) + \sum_{I_2} (1 - |C^2_i|^2) = \infty$

C'est ce résultat qui va nous servir pour la caractérisation des représentations discrètes et continues.

6-3 Représentation de la famille (1 ; 0)

L'espace de la représentation étant ici un produit fortement incomplet, en appliquant le lemme 6-2-2, on obtient :

THEOREME IV. — *Soit une représentation de la famille (1 ; 0) dans un espace* $\otimes^{\mathbf{C}}_{i \in I} H_i$. *Soit* $(f_i = C^1_i e^1_i + C^2_i e^2_i ; i \in I)$ *une suite* C_0 *de* $\mathbf{C}$ *dont tous les termes sont normés à un. La représentation dans* $\otimes^{\mathbf{C}}_{i \in I} H_i$ *sera continue si et seulement si pour toutes partitions* I_1, I_2 *de* I, *la série* $\sum_{I_1} (1 - |C^1_i|^2) + \sum_{I_2} (1 - |C^2_i|^2)$ *diverge.*

Cette caractérisation des représentations continues n'est pas très commode à manipuler dans la pratique. Nous allons essayer de caractériser les représentations discrètes de manière simple, les représentations continues étant alors caractérisées par exclusion.

THEOREME VII. — *Une représentation de la famille (1,0) dans un espace* $\otimes^{\mathbf{C}}_{i \in I} H_i$ *sera discrète si et seulement si la classe forte* $\mathbf{C}$ *contient au moins une suite faiblement équivalente à une suite de la forme* $(e^{\alpha_i}_{i+1} ; i \in I)$.

Supposons qu'il existe $(f_i ; i \in I)$ dans $\mathbf{C}$ avec $(f_i) \approx_w (e^{\alpha_i}_{i+1})$. Il existe alors une suite de nombres complexes $(z_i ; i \in I)$ telle que

$(f_i) \approx (z_i e^{\alpha_i}_{i+1})$. Alors $(z_i e^{\alpha_i}_{i+1} ; i \in I) \in \mathbf{C}$ et $E_{(\alpha)} \otimes_{i \in I} z_i e^{\alpha_i}_{i+1} \neq 0$. Il existe donc une suite (α) pour laquelle le projecteur correspondant $E_{(\alpha)}$ n'est pas nul. La représentation est bien discrète.

Supposons la représentation discrète. Soit $(f_i = C^1_i e^1_i + C^2_i e^2_i ; i \in I)$ une suite C_o de $\mathbf{C}$ ayant tous ses termes normés à un. En utilisant le lemme 6-2-2, nous pouvons dire qu'il existe deux sous-ensembles I_1 et I_2 de I tels que :

$$\sum_{I_1} (1 - |C^1_i|^2) + \sum_{I_2} (1 - |C^2_i|^2) < \infty$$

Donc :

$$\sum_{I_1} (1 - |C^1_i|^2) < \infty \text{ et } \sum_{I_2} (1 - |C^2_i|^2) < \infty$$

Mais $1 - |C^1_i| < 1 - |C^1_i|^2$; $1 - |C^2_i| < 1 - |C^2_i|^2$, cela à cause de la normalisation à l'unité des f_i.

Donc :

$$\sum_{I_1} (1 - |C^1_i|) + \sum_{I_2} (1 - |C^2_i|) < \infty$$

ce qui implique que la suite $(f_i ; i \in I)$ est équivalente à la suite $(e^{\alpha_i}_{i+1} ; i \in 0)$ où $\alpha_i = 0$ pour $i \in I_1$ et $\alpha_i = 1$ pour $i \in I_2$.

Nous avons ainsi obtenu une caractérisation complète des représentations discrètes de la famille (1 ; 0).

En appliquant les mêmes raisonnements aux autres familles de représentations, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

THEOREME VIII. — 1) *Soit une représentation des relations d'anticommutation dans un espace* $\bigoplus_{k=0} (\bigotimes_{i \in I}^{C^k} H_i)$. *Cette représentation sera discrète si et seulement si les classes fortes* $\mathbf{C}^k$ *contiennent chacune au moins une suite faiblement équivalente à une suite de la forme* $(e^{\alpha_i}_{i+1} ; i \in I)$.

2) *Soit une représentation des relations d'anticommutation dans un espace* $\bigoplus_k (\bigotimes_{i \in I}^{C^{2k}} H_i) \oplus (\bigoplus_k (\bigotimes_{i \in I}^{C^{2k+1}} H_i)$. *Cette représentation sera discrète si et seulement si les classes fortes* $\mathbf{C}^{2k}$ *d'une part et les classes* $\mathbf{C}^{2k+1}$ *d'autre part vérifient la propriété* 1).

Nota. — Les représentations des familles (2 ; 0 ; I), (2 ; 0 ; II), (2 ; ∞ ; II) et (2 ; ; III) sont toutes discrètes.

CHAPITRE VII

PROPRIETES DES REPRESENTATIONS DES FAMILLES (1 ; 0) ET (1 ; ∞)

Nous avons obtenu diverses représentations dans la famille (1). Nous devons maintenant étudier le plus en détails possible ces représentations.

Nous devons donc déterminer lesquelles de ces représentations sont équivalentes entre elles.

Pour chacune de ces classes d'équivalence de représentations, il nous faudra regarder les questions d'irréductibilité : savoir caractériser celles qui sont irréductibles et réduire celles qui ne le sont pas. Nous verrons que les représentations que nous avons obtenues qui ne sont pas irréductibles sont complètement réductibles.

Dans tout ce chapitre, nous noterons $U(\Theta)$ les opérateurs unitaires définis par $U(\Theta) \bigotimes_i f = \bigotimes_{i\varepsilon I} e^{i\Theta_i} f_i$.

Nous utiliserons dans ce chapitre les algèbres de Von Neumann engendrées par les opérateurs de la représentation. Nous noterons $A(H ; 1 ; 0)$ et $A(H ; 1 ; \infty)$ les algèbres engendrées par les opérateurs des familles $(1 ; 0)$ et $(1 ; \infty)$ dans l'espace H. Nous utiliserons des résultats classiques sur ces algèbres. On trouvera dans la bibliographie les références aux ouvrages traitant de ces algèbres.

L'étude de cette famille de représentations va être décomposée en deux. Une première partie traitera de la famille $(1 ; 0)$, une seconde de la famille $(1 ; \infty)$. Chacune de ces deux parties débutera par un lemme qui nous permettra de nous borner à étudier des cas particuliers simples. Les résultats ainsi obtenus se généraliseront sans peine.

A) REPRESENTATION DE LA FAMILLE (1 ; 0)

7-1 Lemme préliminaire

Soit une représentation dans un espace $\bigotimes_{i\varepsilon I}^{c} H_i$. Et soit $V = \prod_{i\varepsilon I} V_i$ un opérateur unitaire, tel qu'il est défini dans l'appen-

dice C, qui applique l'espace $\bigotimes_{i \in I}^{C} H_i$ sur l'espace $\bigotimes_{i \in I}^{D} H_i$. Nous allons rechercher quelle est la forme de l'opérateur $(A^C_j)'$ image de A^C_j par V. La lettre C en exposant rappelle que la représentation se réalise dans l'espace $\bigotimes_{i \in I}^{C} H_i$, et comme il ne peut y avoir ici de confusion, nous avons omis de préciser pour chaque opérateur la famille à laquelle il appartient.

Supposons chaque V_i défini dans $L(H_i)$ par sa matrice dans une base $(e^1_i ; e^2_i)$:

$$V_i = \begin{pmatrix} u_i & v_i \\ -\overline{v}_i & \overline{u}_i \end{pmatrix}$$

Nous avons : $(A^C_j)' = V_j A^C_j V_j^{-1}$.

Or :

$$V_i (1-2N_i) V_i^{-1} = (|u_i|^2 - |v_i|^2)(1-2N_i) - 2\overline{u}_i \overline{v}_i a_i - 2 u_i v_i a_i^*$$

$$V_i a_i V_i^{-1} = \overline{u}_i v_i (1-2N_i) + u_i^2 a_i - v_i^2 a_i^*$$

$$V_i a_i^* V_i^{-1} = u_i \overline{v}_i (1-2N_i) - \overline{v}_i^2 a_i + \overline{u}_i^2 a_i^*$$

d'où : $(A^C_j)' = f_j(a_j, a_j^*)$ où f est une combinaison linéaire *finie* de produits *finis* d'opérateurs a_i et a_i^*.

Nous avons défini les opérateurs de la représentation par :

$$A^C_j = \prod_{i<j} (1-2N_i) \cdot a_j$$

En tenant compte de $(1-2N_i)(1-2N_i) = 1$, nous pouvons écrire :

$$a_j = \prod_{i<j} (1 - 2 A^{C*}_i A^C_i) \cdot A^C_j$$

En reportant ceci dans la relation qui donne $(A^C_j)'$, on trouve : $(A^C_j)' = g_j(A^{C'}_j, A^{C'*}_j)$ où g est une combinaison linéaire *finie* de produits *finis* d'opérateurs $A^{C'}_j$, $A^{C'*}_j$; c'est donc un élément de l'algèbre de Von Neumann $A(C' ; 1 ; 0)$.

LEMME V-1-1. — *Soit* A_j (1 ; 0) *les opérateurs d'une représentation de la famille (1 ; 0) dans un espace* $\bigotimes^{C}_{i\varepsilon I} H_i$.

Soit $\bigotimes^{C'}_{i\varepsilon I} H_i$ *l'image de* $\bigotimes^{C}_{i\varepsilon I} H_i$ *par un opérateur unitaire* $V = \prod_{i\varepsilon I} V_i$ *(appendice C).*

L'image $(A^{C}_{j})'$ *de* A^{C}_{j} *par* V *est un opérateur de l'algèbre de Von Neuman* $\mathbf{A}\ (C' ; 1 ; 0)$.

Nous écrirons :

$$(A^{C}_{j})' = f\ (A^{C'}_{j}, A^{C'*}_{j})$$

Si $(A^{C'}_{j})'$ est l'image de $A^{C'}_{j}$ par $V-1$, nous noterons :

$(A^{C'}_{j})' = g\ (A^{C}_{j}, A^{C*}_{j})$ où g est une combinaison linéaire *finie* de produits *finis* d'opérateurs.

7-2 Application à l'équivalence des représentations

Considérons deux représentations de la famille (1 ; 0) dans deux espaces $\bigotimes^{C}_{i\varepsilon I} H_i$ et $\bigotimes^{D}_{i\varepsilon I} H_i$. Soit V un opérateur tel qu'il a été défini au lemme 7-1-1. V applique $\bigotimes^{C}_{i\varepsilon I} H_i$ sur $\bigotimes^{C'}_{i\varepsilon I} H_i$ et $\bigotimes^{D}_{i\varepsilon I} H_i$ sur $\bigotimes^{D'}_{i\varepsilon I} H_i$.

Supposons que les deux représentations dans $\bigotimes^{C}_{i\varepsilon I} H_i$ et $\bigotimes^{D}_{i\varepsilon I} H_i$ sont équivalentes. Il existe alors un opérateur unitaire B appliquant $\bigotimes^{C}_{i\varepsilon I} H_i$ sur $\bigotimes^{D}_{i\varepsilon I} H_i$ tel que :

$$B\ A^{C}_{j} = A^{D}_{j}\ B \qquad B\ A^{C*}_{j} = A^{D*}_{j}\ B$$

Nous allons démontrer que les représentations dans $\bigotimes^{C'}_{i\varepsilon I} H_i$ et $\bigotimes^{D'}_{i\varepsilon I} H_i$ sont elles aussi équivalentes.

Soit B' l'image de B par V. B' est un opérateur unitaire qui applique $\bigotimes^{C'}_{i\varepsilon I} H_i$ sur $\bigotimes^{D'}_{i\varepsilon I} H_i$.

Calculons alors :

$$V^{-1}\ B'\ A^{C'}_{j}\ V = V^{-1}\ B'\ V\ V^{-1}\ A^{C'}_{j}\ V = B\ g\ (A^{C}_{i}, A^{C*}_{j})$$

Or :

$$B\ g(A^{C}_{j}, A^{C}_{j}) = g(A^{D}_{j}, A^{D*}_{j})\ B$$

D'où :

$$V^{-1}\ B'\ A^{C'}_{j}\ V = g(A^{D}_{j}, A^{D'}_{j})\ B = V^{-1}\ A^{D'}_{j}\ B'\ V$$

B' est donc tel que $B'\ A^{C'}_{j} = A^{D'}_{j}\ B'$ et les représentations dans $\bigotimes^{C'}_{i\varepsilon I}\ H_i$ et $\bigotimes^{D'}_{i\varepsilon I}\ H_i$ sont équivalentes.

LEMME 7-2-1. — *Soient deux représentations de la famille (1 ; 0) dans deux espaces* $\bigotimes^{C}_{i\varepsilon I}\ H_i$ *et* $\bigotimes^{D}_{i\varepsilon I}\ H_i$.

Soit défini comme au lemme 7-1-1 un opérateur V *qui applique* $\bigotimes^{C}_{i\varepsilon I}\ H_i$ *sur* $\bigotimes^{C'}_{i\varepsilon I}\ H_i$ *et* $\bigotimes^{D}_{i\varepsilon I}\ H_i$ *sur* $\bigotimes^{D'}_{i\varepsilon I}\ H_i$.

Les deux représentations dans $\bigotimes^{C}_{i\varepsilon I}\ H_i$ *et* $\bigotimes^{D}_{i\varepsilon I}\ H_i$ *sont équivalentes si et seulement si les deux représentations dans* $\bigotimes^{C'}_{i\varepsilon I}\ H_i$ *et* $\bigotimes^{D'}_{i\varepsilon I}\ H_i$ *le sont aussi.*

Nous voyons donc qu'une condition nécessaire et suffisante d'équivalence, "invariante" par les applications unitaires V, établies dans un cas particulier, sera valable pour toutes les représentations de la famille (1 ; 0).

7-3 Application à l'irréductibilité des représentations

Soit une représentation dans un espace $\bigotimes^{C}_{i\varepsilon I}\ H_i$. Supposons cette représentation irréductible. Considérons la représentation de la même famille dans l'espace $\bigotimes^{C'}_{i\varepsilon I}\ H_i$ image de $\bigotimes^{C}_{i\varepsilon I}\ H_i$ par un opérateur V défini au lemme 7-1-1. Nous allons voir que la représentation dans cet espace est elle aussi irréductible.

Nous devons rechercher les opérateurs B' de $\mathbf{L}\left(\bigotimes^{C'}_{i\varepsilon I}\ H_i\right)$ tels que :

$$B'\ A^{C'}_{j} = A^{C'}_{j}\ B' \qquad B'\ A^{C'*}_{j} = A^{C'*}_{j}\ B'$$

Si B est l'image de B' par V^{-1}, en appliquant le lemme 7-1-1, on voit que B est un opérateur de $\mathbf{L}\left(\bigotimes^{C}_{i\varepsilon I}\ H_i\right)$ tel que :

$$B\ f(A^{C}_{j}, A^{C*}_{j}) = f(A^{C}_{j}, A^{C*}_{j})\ B$$

Or, il est facile de voir, en appliquant $V-1$ à A^C_j, que les algèbres de Von Neumann engendrées par les $f(A^C_j, A^{C*}_j)$ et les A^C_j sont les mêmes.

Donc, B est un opérateur scalaire. V appliquant l'unité dans $\bigotimes^C_{i\varepsilon I} H_i$ sur l'unité dans $\bigotimes^{C'}_{i\varepsilon I} H_i$, B' est lui aussi un opérateur scalaire. La représentation dans $\bigotimes^{C'}_{i\varepsilon I} H_i$ est elle aussi irréductible.

LEMME 7-3-1. — *Soit une représentation de la famille (1 ; 0) dans un espace* $\bigotimes^C_{i\varepsilon I} H_i$.

Soit $\bigotimes^{C'}_{i\varepsilon I} H_i$ *l'image de* $\bigotimes^C_{i\varepsilon I} H_i$ *par un opérateur* V *tel qu'il est défini au lemme 7-1-1. La représentation dans* $\bigotimes^C_{i\varepsilon I} H_i$ *est irréductible si et seulement si la représentation dans* $\bigotimes^{C'}_{i\varepsilon I} H_i$ *l'est aussi.*

Si donc nous arrivons à démontrer qu'une représentation particulière de la famille (1 ; 0) est irréductible, nous pourrons affirmer que toutes les représentations de cette famille le sont aussi.

7-4 Condition d'équivalence

Considérons deux représentations dans deux espaces $\bigotimes^C_{i\varepsilon I} H_i$ et $\bigotimes^D_{i\varepsilon I} H_i$.

Si C et D sont faiblement équivalentes, il existe un opérateur $U_i(\Theta)$ qui applique $\bigotimes^C_{i\varepsilon I} H_i$ sur $\bigotimes^D_{i\varepsilon I} H_i$. Cet opérateur est tel que :

$$U_i(\Theta)\, A^C_j = A^D_j\, U_i(\Theta) \qquad U_i(\Theta)\, A^{D*}_j = A^{D*}_j\, U_i(\Theta)$$

Les deux représentations dans $\bigotimes^C_{i\varepsilon I} H_i$ et $\bigotimes^D_{i\varepsilon I} H_i$ sont donc unitairement équivalentes.

Si, maintenant, nous supposons les représentations dans $\bigotimes^C_{i\varepsilon I} H_i$ et $\bigotimes^D_{i\varepsilon I} H_i$ équivalentes, nous pouvons, en appliquant le lemme 7-2-1, nous ramener au cas où la classe C est représentée par la suite $(e^1_i\ ;\ i\in I)$. Définissons une base de l'espace $\bigotimes^D_{i\varepsilon I} H_i$ par l'ensemble des vecteurs $e_p = \bigotimes_{i\varepsilon I} f^1_{p_i} \otimes f^2_{p_i}$

où $f_i = C^{1j}\, e^1 + C^{2j}\, e^2$ $\qquad j = 1, 2.$

Dire que les deux représentations sont équivalentes est équivalent à dire qu'il existe un opérateur unitaire B qui applique $\bigotimes^{C}_{i \in I} H_i$ sur $\bigotimes^{D}_{i \in I} H_i$ et qui est tel que :

$$B\, A^{C}_{j} = A^{D}_{j}\, B \qquad B\, A^{C*}_{j} = A^{D*}_{j}\, B$$

En particulier, nous avons :

$$B\, A^{C}_{j} \bigotimes_{i \in I} e^1_i = 0 = A^{D}_{j}\, B \bigotimes_{i \in I} e^1_i \text{ et cela pour tout } j.$$

Supposons que : $B \bigotimes_{i \in I} e^1_i = \sum_p \lambda_p\, e^1_{l_p}$

Il vient alors : $0 = \sum_p \lambda_p\, A^{D}_{j}\, e_{l_p}$ et cela pour tout j.

Or : $A^{D}_{j}\, e_{l} = 0$ pour tout j si et seulement si $f_i = C^{1j}_{i}\, e^1_i$.

Ce qui revient à dire qu'une des deux suites $(f_i\ ;\ i \in I)$ est faiblement équivalente à la suite $(e^1_i\ ;\ i \in I)$.

Les deux classes **C** et **D** sont donc faiblement équivalentes.

D'autre part, il est clair que deux classes faiblement équivalentes ont pour images, par un opérateur V, deux classes faiblement équivalentes.

THEOREME IX. — *Deux représentations de la famille (1 ; 0) dans deux espaces* $\bigotimes^{C}_{i \in I} H_i$ *et* $\bigotimes^{D}_{i \in I} H_i$ *sont unitairement équivalentes si et seulement si les classes* **C** *et* **D** *sont faiblement équivalentes.*

7-5 Irréductibilité

Considérons la représentation se réalisant dans l'espace $\bigotimes^{C}_{i \in I} H_i$ où **C** est la classe forte qui contient la suite $(e^1_i\ ;\ i \in I)$. Il nous faut rechercher les opérateurs B tels que :

$$B\, A^{C}_{j} = A^{C}_{j}\, B \qquad B\, A^{C*}_{j} = A^{C*}_{j}\, B$$

Une base orthonormale complète de cet espace est constituée par l'ensemble des vecteurs $e_{l_p} = \bigotimes_{l-l_p} e^1_{l_p} \otimes e^2_{l_p}$

et l'on voit sans peine que :

$$A^{C}_{j}\ e_{\substack{I\\p}} = 0 \text{ pour tout } j \in I - I_p$$

$$A^{C}_{j}\ e_{\substack{I\\p}} = e_{\substack{(I\ +\ j)\\p}} \text{ pour tout } j \in I_p$$

$$\prod_{\substack{I\\p}} A^{*}_{j}\ e_{\substack{I\\p}} = e_{\substack{I\\p}} \qquad \text{où } e_{I} = \bigotimes_{i \in I} e^{1}_{i}$$

Supposons B défini par $B\ e_{I} = \sum_{p}\ \lambda_{p}\ e_{p}$

Nous pouvons écrire : $A^{C}_{j}\ B\ e_{I} = B\ A^{C}_{j}\ e_{I} = 0$ pour tout j.

Soit $\sum_{p}\ \lambda_{p}\ A^{C}_{j}\ e_{\substack{I\\p}} = 0$

Or : $A^{C}_{j}\ e_{\substack{I\\p}} = 0$ pour tout j si et seulement si $e_{I_p} = e_{I}$

Donc : $B\ e_{I} = \lambda\ e_{I}$

Calculons maintenant :

$$B\ e_{\substack{I\\p}} = B \left(\prod_{\substack{I\\p}} A^{*}_{j} \right) e_{I} = \left(\prod_{\substack{I\\p}} A^{*}_{j} \right) B\ e_{I} = \lambda\ e_{\substack{I\\p}}$$

La représentation est donc totalement irréductible. En appliquant le lemme 7-3-1, nous pouvons dire :

THEOREME X. — *Toutes les représentations de la famille (1 ; 0) sont irréductibles.*

b) REPRESENTATIONS DE LA FAMILLE (1 ; ∞)

7-6 **Remarque préliminaire**

Nous allons démontrer des lemmes analogues à ceux qui ont été démontrés aux paragraphes 7-1, 7-2, 7-3.

Soit A_j (1 ; ∞) les opérateurs d'une représentation de la famille (1 ; ∞) dans un espace $H = \bigoplus_{k} \left(\bigotimes^{C_k}_{i \in I} H_i \right)$ [une somme finie ou infinie donnera les mêmes résultats].

Soit $H' = \bigoplus_{k} \left(\bigotimes^{C'_k}_{i \in I} H_i \right)$ l'image de H par un opérateur unitaire V tel qu'il a été défini au lemme 7-1-1. Cet opérateur applique chaque $\bigotimes^{C_k}_{i \in I} H_i$ sur $\bigotimes^{C'_k}_{i \in I} H_i$.

Si nous appelons $(A^H_j)'$ l'image de A^H_j par V, on trouve par un calcul analogue à celui qui a été fait :

$$(A^H_j)' = f\,(U\,(\Theta)_i\ a_j\ ,\ U\,(-\Theta)_i\ a^*_j)$$

où f est une combinaison linéaire *finie* de produits *finis* d'opérateurs.

Mais $A^H_j = U\,(\Theta)_i \prod_{i<j} (1-2N)_i\ a_j$

donne $U\,(\Theta)_i\ a_j = \prod_{i<j} (1-2N)_i\ A^H_j$

Donc : $(A^H_j)' = g\,(A^{H'}_j, A^{H'*}_j)$

où g est une combinaison linéaire *finie* de produits *finis* d'opérateurs. C'est donc un opérateur de l'algèbre de Von Neumann engendrée par les opérateurs de la représentation dans H'.

C'est ce fait qui nous avait permis de démontrer les lemmes 7-2-1 et 7-3-1. Nous pouvons donc dans ce cas donner deux lemmes analogues.

LEMME 7-6-1. — *Soient deux représentations de la famille (1 ; ∞) dans deux espaces* H *et* H'. *Soient* H_1 *et* H'_1 *les images de* H *et* H' *par un opérateur unitaire* V *tel qu'il a été défini au lemme 7-1-1. Les deux représentations dans* H *et* H' *sont équivalentes si et seulement si les deux représentations dans* H_1 *et* H'_1 *le sont aussi.*

LEMME 7-6-2. — *Soit une représentation de la famille (1 ; ∞) dans un espace* H. *Soit* H' *l'image de* H *par l'opérateur* V *défini au lemme 7-1-1. Un sous-espace de* H *où la représentation est irréductible a pour image par* V *un sous-espace de* H' *où la représentation est irréductible, et réciproquement.*

7-7 Equivalence

Nous pouvons nous contenter, grâce au lemme 7-6-1, de traiter un cas particulier. Si nous trouvons une condition d'équivalence "invariante" par les V, cette condition sera vraie pour toutes les représentations.

Considérons deux représentations dans deux espaces $H = \bigoplus_k (\bigotimes_{i\varepsilon I}{}^{C^k_i} H_i)$ et $H' = \bigoplus_k (\bigotimes_{i\varepsilon I}{}^{C'^k_i} H_i)$. Supposons que C° et D° appartiennent à une même classe faible. Il existe alors un opérateur $U\,(\Theta)_i$ qui applique $\bigotimes_{i\varepsilon I}{}^{C^k_i} H_i$ sur $\bigotimes_{i\varepsilon I}{}^{C'^k_i} H_i$ pour chaque k. Cet opérateur est évidemment tel que :

$$U\,(\Theta)_i\ A^H_j = A^{H'}_j\ U\,(\Theta)_l$$

Les deux représentations dans H et H' sont donc équivalentes.

Supposons maintenant ces deux représentations équivalentes. Nous pouvons, comme nous l'avons fait au paragraphe 7-4, nous ramener au cas où la classe C° est représentée par la suite $(e^1_i \; ; \; i \in I)$. Il existe alors un opérateur B unitaire qui applique H sur H' et qui est tel que :

$$B \; A^H_j = A^{H'}_j \; B \qquad\qquad B \; A^{H*}_j = A^{H'*}_j \; B$$

En utilisant les vecteurs $(0,..., e^{i\,k\,\Theta\,i}\, e^1_i, 0,...)$, où le seul terme non nul est à la $k^{ième}$ place, nous montrerons par un calcul analogue à celui fait au paragraphe 7-4 que les classes C^k et C'^k sont faiblement équivalentes pour tout k.

THEOREME XI. — *Deux représentations de la famille (1 ; ∞) dans deux espaces* $\bigoplus_k (\bigotimes_{i\varepsilon I}^{C^k} H_i)$ *et* $\bigoplus_k (\bigotimes_{i\varepsilon I}^{D^k} H_i)$ *sont unitairement équivalentes si et seulement si les deux classes* C° *et* D° *sont faiblement équivalentes.*

7-8 Irréductibilité

Nous allons, dans ce paragraphe, distinguer entre les représentations de la famille (1 ; ∞ ; I) et les représentations de la famille (1 ; ∞ II).

Nous ne traiterons en détails qu'un cas particulier simple. Tous les autres cas se ramènent à celui-là par application des opérateurs $V = \prod_i V_i$.

Notons tout de suite que les opérateurs $U(\Theta)$ avec $\prod_i e^{i\,\Theta\,i} = \infty$ sont des opérateurs, non multiples de l'unité, qui commutent avec les opérateurs de la représentation. Elle n'est donc pas irréductible mais nous allons voir qu'elle est complètement réductible.

Nous traiterons comme cas particulier celui où la classe C° est celle qui contient la suite $(e^1_i \; ; \; i \in I)$.

Pour réduire la représentation, il nous faudra trouver les projecteurs du centre de l'algèbre de Von Neumann engendrée par les opérateurs de la représentation. Il est clair, vu la forme des générateurs de cette algèbre, que nous pouvons nous contenter de rechercher les éléments du commutant qui sont auto-adjoints.

1) *Représentations de la famille (1 ; ∞ ; I)*

L'espace de la représentation est $H = \bigoplus_k (\bigotimes_{i\varepsilon I}^{C^k} H_i)$.

Une base de cet espace est l'ensemble des vecteurs :

$$E_{\substack{l\\p}} = (0,\ldots, 0, \bigotimes_{l-l\ p} e^{ik\Theta i}_{i}\ e^{1}_{i} \otimes e^{ik\Theta i}_{\substack{l\\p}}\ e^{2}_{i}, 0,\ldots, 0)$$ où le seul terme non nul est à la $k^{ième}$ place. Il est facile de voir que :

si $j \in l - l_p$: $A_j\ E^k_{\substack{l\\p}} = 0$; $A^*_j\ E^k_{\substack{l\\p}} = E^{k-1}_{\substack{l+j\\p}}$

si $j \in l_p$: $A_j\ E^k_{\substack{l\\p}} = E^{k+1}_{\substack{l+j\\p}}$; $A^*_j\ E^k_{\substack{l\\p}} = 0$

Si $E^k_o = (0,\ldots, \bigotimes_{i \in l} e^{ik\Theta i}_{i}\ e^{1}_{i}, 0,\ldots)$ pour tout j, $A_j\ E^k_o = 0$ et

$$E^k_{\substack{l\\p}} = \left(\prod_{\substack{l\\p}} A^*_j\right) E^{k+p}_o$$ où p est le nombre des éléments de l_p.

Nous recherchons les éléments B de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ tels que $B\ A_j = A_j\ B$

et supposons $B\ E_o = \sum_{e,\ lp}\ \lambda^{lp\ \ l}_{kl}\ E_{lp}$

Alors :

$$A_j\ B\ E^k_o = B\ A_j\ E^k_o = 0, \text{ soit } B\ E^k_o = \sum_l \lambda_{kl}\ E^l_o$$

Nous allons voir que ces λ_{kl} permettent de caractériser complètement les opérateurs B. En effet :

$$B\ E^k_{\substack{l\\p}} = B\left(\prod_{\substack{l\\p}} A^*_j\right) E^{k+p}_o = \left(\prod_{\substack{l\\p}} A^*_j\right) B\ E^{k+p}_o$$

$$= \sum_l \lambda_{k+p,\ l-p}\ E^l_{lp}$$

Regardons ce que donne effectivement le fait que B commute à tous les opérateurs de la représentation.

$$A^*_j\ B\ E^k_{lp} = B\ A^*_j\ E^k_{lp}$$

D'où :

$$A^*_j \sum_l \lambda_{k+p,\ l}\ E^{l-p}_{\substack{l\\p}} = B\ E^{k-1}_{\substack{l\\p+j}}$$

Soit :

$$\sum_l \lambda_{k+p,\ l}\ E^{l-p-1}_{\substack{l\\p+j}} = \sum_l \lambda_{k+p,\ l}\ E^{l-p-1}_{\substack{l\\p+j}}$$

On verra de même que $B\ A_j\ E^k_{\substack{l\\p}} = A_j\ B\ E^k_{\substack{l\\p}}$

Nous venons d'associer à chaque opérateur B du commutant de l'algèbre de Von Neumann engendré par les opérateurs de la représentation $A'(H ; 1 ; \infty)$ une matrice N x N.

Il est facile de voir qu'au produit de deux opérateurs du commutant est associé le produit des deux matrices correspondantes. Nous avons donc défini un isomorphisme d'algèbres de Von Neumann entre l'algèbre $A'(H ; \infty ; 1)$ et l'algèbre des opérateurs d'un espace de Hilbert à N dimensions. Le commutant est donc un facteur de type I_N, l'algèbre elle-même est un facteur de type I.

Pour réduire les représentations, nous devons rechercher N projecteurs dans le centre de cette algèbre.

Nous pouvons considérer les N projecteurs P_j représentés par les matrices :

$P_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ & 0 \end{pmatrix}$ où 1 est sur la jème ligne et la jème colonne.

L'isomorphisme dont il vient d'être question est défini par :

$$B\, E^k_{lp} = \sum_l \lambda_{k+p,\, l-p}\, E^l_{lp}$$

Pour les projecteurs P_j, cela donne :

$$P_j\, E^k_{lp} = \delta_{k+p,\, j}\, E^{2k+p}_{lp}$$

Ce que nous pouvons écrire :

$$P_j\, E^k_{lp} = \delta_{k+p,\, j}\, U_i(2p\Theta)\, E^k_{lp}$$

Un calcul très simple montre que dans chacun des sous-espaces associés aux P_j, la représentation est irréductible.

D'autre part, l'opérateur $U_i(\Theta_i)$ applique ces sous-espaces les uns les autres et il est tel que :

$$U_i(\Theta)\, A^k_j = A^{k'}_j\, U_i(\Theta)$$

où A^k_j et $A^{k'}_{j'}$ sont les restrictions des A_j aux sous-espaces associés aux projecteurs P_k et $P_{k'}$ respectivement. Les sous-représentations irréductibles sont donc toutes équivalentes entre elles. Nous avons donc réussi à réduire une représentation particulière de la famille $(1 ; \infty ; I)$. Les autres se réduiront de façon analogue. Etant donné une représentation dans un espace $F = \bigoplus_{k=0}^{N-1} (\otimes^{Dk} H_i)$, on déterminera l'opérateur $V = \prod_i V_i$ qui applique H sur F. L'image des sous-espaces invariants dans H, par V^{-1}, seront les sous-espaces invariants dans F. Par application du lemme 7-6-1, on montre que ces sous-représentations sont équivalentes entre elles.

THEOREME XII. — *Toute représentation de la famille (1 ; ∞ ; I) est somme directe de* N *représentations irréductibles équivalentes entre elles. Si la représentation se réalise dans l'espace* $\mathbf{H} = \bigoplus_{k=o}^{N-1} \left(\bigotimes_{i \in I}^{C^k} \mathbf{H}_i\right)$, *les sous-espaces invariants s'obtiennent de la façon suivante :*

On détermine l'opérateur unitaire V *(voir lemme 7-1-1) qui applique* $\mathbf{H}$ *sur* $\mathbf{F} = \bigoplus_{k=0}^{N-1} \left(\bigotimes_{i \in I}^{D^k} \mathbf{H}_i\right)$ *où* $\mathbf{D}^\circ$ *est la classe forte contenant la suite* $(e^1_i ; i \in I)$. *Les sous-espaces de* $\mathbf{H}$ *où les représentations sont irréductibles sont les images par* V^{-1} *des sous-espaces de* $\mathbf{F}$ *associés aux projecteurs* P_j *définis par :*

$$P_j \; E^k_{I_p} = \delta_{k+p,\,j} \; U(2p\,\Theta_i) \; E^k_{I_p} \quad (p = \text{nombre d'éléments de } I).$$

où

$$E^k_{I_p} = (0,\ldots, \bigotimes_{I-I_p} e^{ik\Theta i} e^1_i \otimes_{I_p} e^{ik\Theta i} e^2_i, \; 0,\ldots, 0)$$

L'algèbre de Von Neumann engendrée par les opérateurs de la représentation est un facteur de type I_N, *son commutant est un facteur de type* I_N.

2) *Représentations de la famille (1 ; ∞ ; II)*

Par un calcul tout à fait similaire, on obtient :

THEOREME XII. — *Les représentations de la famille (1 ; ∞ ; II) sont sommes directes d'une infinité dénombrable de représentations irréductibles équivalentes entre elles. Les sous-espaces invariants s'obtiennent comme au théorème XI. Mais nous aurons ici à considérer un nombre infini de projecteur* P_i.

L'algèbre de Von Neumann engendrée par les opérateurs de la représentation est un facteur de type I_∞, *son commutant est de type* I_∞.

7-9 Retour sur les représentations discrètes

Nous savons qu'une représentation de la famille (1 ; 0) dans un espace $\bigotimes_{i \in I}^{C} \mathbf{H}_i$ est discrète si et seulement si $\mathbf{C}$ contient une suite faiblement équivalente à une suite $(e^{\alpha_i}_{i+1} ; i \in I)$.

D'autre part, deux représentations de la famille (1 ; 0) dans deux espaces $\bigotimes_{i \in I}^{C} H_i$ et $\bigotimes_{i \in I}^{D} H_i$ sont équivalentes si et seulement si les deux classes C et D sont faiblement équivalentes. Or, deux classes fortes engendrées par les suites $(e_i^{\alpha_{i+1}} ; i \in I)$ et $(e_i^{\beta_{i+1}} ; i \in I)$ sont faiblement équivalentes si et seulement si les deux suites $(\alpha_i ; i \in I)$ et $(\beta_i ; i \in I)$ sont équivalentes au sens de la définition 6-1-1.

Nous voyons donc qu'à chaque classe d'équivalence $[\alpha]$ correspond une classe de représentations discrètes équivalentes.

Ce résultat est encore valable pour les représentations de la famille (1 ; ∞).

LEMME 7-9-1. — *A chaque classe d'équivalence de suites* $[\alpha]$ *correspond une classe d'équivalence de représentation discrète de la famille (1 ; 0) et une classe d'équivalence des représentations discrètes de la famille (1 ; ∞).*

Pour l'étude des représentations discrètes, nous pourrons donc borner à considérer celles qui se réalisent dans des espaces où les classes fortes sont engendrées par des suites de la forme $(e_i^{\alpha_{i+1}} ; i \in I)$.

CHAPITRE VIII

ETUDE DES REPRESENTATIONS DE LA FAMILLE (2)

Nous allons tout d'abord voir qu'il existe un opérateur unitaire qui nous permet de passer des représentations de la famille (1) aux représentations de la famille (2) et réciproquement. L'existence de cet opérateur va nous permettre de montrer que les représentations des deux familles sont unitairement équivalentes.

8-1 Existence d'une application unitaire entre les deux familles de représentations

1) *Cas des familles (1 ; 0) et (2 ; 0)*

Considérons deux représentations de la famille (1 ; 0) dans deux espaces $\bigotimes_{i\in I}^{C} H_i$ et $\bigotimes_{i\in I}^{D} H_i$ où si **C** est représentée par une suite $(f_i\ ;\ i\in I)$, **D** est représentée par la suite $\left((1-2N_i)\, f_i\ ;\ i\in I\right)$

Considérons la représentation somme directe de ces deux représentations ; elle se réalise dans l'espace $H = \bigotimes_{i\in I}^{C} H_i \oplus \bigotimes_{i\in I}^{D} H_i$

Nous pouvons dans **H** définir une représentation de la famille (2 ; 0). Un calcul très simple montre que si **U** est l'opérateur unitaire défini par :

$$U \bigotimes_{i\in I} f_i = \bigotimes_{i\in I} (1-2N_i)\, f_i$$

avec :

$$U\,U = 1 \qquad U = U^*$$

Nous avons :

$$U\,[A^{C}_{j}(1,0) \oplus A^{D}_{j}(1,0)] = A^{H}_{j}(2,0)$$
$$U\,A^{H}_{j}(2,0) = A^{C}_{j}(1,0) \oplus A^{D}_{j}(1,0)$$

2) *Cas des représentations des familles (1 ; ∞) et (2 ; ∞)*

Considérons deux représentations de la famille (1 ; ∞) dans deux espaces $H_1 = \bigoplus_k \left(\bigotimes_{i\in I}^{C_k} H_i\right)$ et $H_2 = \bigoplus \left(\bigotimes_{i\in I}^{D_k} H_i\right)$ où les deux

sommes ont le même nombre de termes et où si C° est représentée par une suite $(f_i ; i \in I)$, D° est représentée par la suite

$$\left((1 - 2N_i) f_i ; i \in I\right)$$

Considérons la représentation somme directe de ces deux représentations : elle se réalise dans $H = H_1 \oplus H_2$. Nous pouvons également dans cet espace définir une représentation de la famille $(2 ; \infty)$. Un calcul très simple montre alors que :

$$U_j [A^{H_1}_j (1, \infty) \oplus A^{H_2}_j (1, \infty)] = A^H_j (2, \infty)$$

$$U_j A^H_j (2, \infty) = A^{H_1}_j (1, \infty) \oplus A^{H_2}_j (1, \infty)$$

En définitive :

PROPOSITION 8-1-1. — *Soit* U *l'opérateur défini par :*

$$U \bigotimes_{i \in I} f_i = \bigotimes_{i \in I} (1 - 2N_i) f_i$$

Soit C^k *une classe forte représentée par une suite* $(e^{ik\Theta_i} f_i ; i \in I)$ *et* D^k *la classe forte représentée par la suite* $(e^{ik\Theta_i} (1 - 2N_i) f_i ; i \in I)$.

1) *Posons* $H = (\bigotimes^{C^\circ}_{i \in I} H_i) \oplus (\bigotimes^{D^\circ}_{i \in I} H_i)$ *et soient* $A^{C^\circ}_j (1 ; 0)$, $A^{D^\circ}_j (1 ; 0)$ *et* $A^H_j (2 ; 0)$ *les représentations des familles (1 ; 0) et (2 ; 0) dans les espaces* $\bigotimes^{C^\circ}_{i \in I} H_i$ *et* $\bigotimes^{D^\circ}_{i \in I} H_i$ *et* H.

Alors :

$$U_j [A^{C^\circ}_j (1, 0) \oplus A^{D^\circ}_j (1, 0)] = A^H_j (2, 0)$$

$$U_j A^H_j (2, 0) = A^{C^\circ}_j (1, 0) \oplus A^{D^\circ}_j (1, 0)$$

2) *Posons* $H = \left(\bigoplus_k (\bigotimes^{C^k}_{i \in I} H_i)\right) \oplus \left(\bigoplus_k (\bigotimes^{D^k}_{i \in I} H_i)\right)$

et soient $A^C_j (1 ; \infty)$, $A^D_j (1 ; \infty)$ *et* $A^H_j (2 ; \infty)$ *les opérateurs de représentations de familles (1 ; ∞) et (2 ; ∞) respectivement dans les espaces* $\bigoplus_k (\bigotimes^{C^k}_{i \in I} H_i)$ *et* $\bigoplus_k (\bigotimes^{D^k}_{i \in I} H_i)$ *et* H.

Alors :

$$U_j [A^C_j (1, \infty) \oplus A^D_j (1, \infty)] = A^H_j (2, \infty)$$

$$U_j A^H_j (2, \infty) = A^C_j (1, \infty) \oplus A^D_j (1, \infty)$$

8-2 Application à l'étude des représentations de la famille (2)

Nous allons montrer que les représentations de la famille (2) sont unitairement équivalentes à la somme directe de deux représentations de la famille (1).

Etudions tout d'abord le cas des familles (1 ; 0) et (2 ; 0). Les notations sont les mêmes que dans la proposition 8-1-1 1).

Considérons l'opérateur $V = \frac{I}{2^{\frac{1}{2}}} (I + i U)$

Cet opérateur est unitaire et applique H sur lui-même. D'autre part :

$$\frac{I}{2^{\frac{1}{2}}} (I + i U) A^{H}_{j} (2, 0) \frac{I}{2^{\frac{1}{2}}} (I - i U) = i U A^{H}_{j} (2, 0)$$

$$= i [A^{Co}_{j} (1) \oplus A^{Do}_{j} (1, 0)]$$

Il est clair que les opérateurs $i (A^{Co}_{j} [1, 0] \oplus A^{Do}_{j} [1, 0])$ forment une représentation des relations d'anticommutation équivalente à la représentation définie par les opérateurs $(A^{Co}_{j} [1, 0] \oplus A^{Do}_{j} [1, 0])$, ce qui démontre l'équivalence annoncée.

On démontrera sans peine des résultats analogues pour les représentations des familles (1 ; ∞) et (2 ; ∞).

THEOREME XIII. — *Toute représentation de la famille (2 ; 0) [resp. (2 ; ∞)] est équivalente à la somme directe de deux représentations de la famille (1 ; 0) [resp. (2 ; ∞)].*

Dans tous les cas, nous pouvons ainsi ramener l'étude des représentations de la famille (2) à celle des représentations de la famille (1) qui a été faite au chapitre VII.

CHAPITRE IX

AUTRE MANIERE DE DEFINIR LES OPERATEURS DE LA REPRESENTATION

Nous allons donner pour terminer une autre façon d'obtenir les opérateurs des deux familles de représentations.

9-1 Représentation de la famille (1)

Considérons l'opérateur $A_1 = a_1$; nous avons vu au chapitre III qu'un tel opérateur peut être considéré comme le "premier d'une suite d'opérateurs anticommutants".

Considérons maintenant l'opérateur $A_2 = V_1 a_2$ (où a_2 a été défini au chapitre III). Nous allons rechercher la forme de V_1 pour que A_1 et A_2 anticommutent. Il est facile de voir que V_1 doit vérifier les relations :

$$V_1 a_2 V_1 a_2 = 0$$

$$a_1 V_1 a_2 + V_1 a_2 a_1 = 0$$

$$a_1 V_1 a_2 + V_1 a_2 a_1 = 0$$

Or, V_1 peut être considéré comme un opérateur de $\mathbf{L}(\mathbf{H}_1)$. On montre très facilement que pour que les trois relations ci-dessus soient vérifiées il faut que V_1 s'écrive : $V_1 = e^{i\Theta_1}(1 - 2N_1)$.

Nous semblons donc retrouver exactement les opérateurs de la famille (1). Un raisonnement par récurence va nous prouver que cela est bien vrai.

Supposons alors donné une suite d'opérateurs anticommutants :

$$A_j = \prod_{i<j} e^{i\Theta_i}(1 - 2N_i) A_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

et recherchons la forme de l'opérateur V_n tel que l'opérateur

$A_{n+1} = V_n a_{n+1}$ anticommute avec tous les A_j. Pour simplifier l'écriture, nous poserons $V_j = \prod_{i<j} (1-2N_i)\, e^{i\Theta_i}$. A_j $(j \leqslant n)$.

Nous devons donc rechercher les V_n tels que :

$$V_n a_{n+1} V_n a_{n+1} = 0$$

$$V_n a_{n+1} V_{j-1} a_j + V_{j-1} a_j V_n a_{n+1} = 0$$

$$V_n^* a_{n+1}^* V_{j-1} a_j + V_{j-1} a_j V_n^* a_{n+1}^* = 0$$

En remarquant que :

1) les opérateurs a_{n+1} commutent aux V_{j-1} $(j \leqslant n)$;

2) les opérateurs a_j et a_k commutent pour $j \neq k$;

ces relations se mettent sous la forme :

$$V_n a_{n+1} + V_n a_{n+1} = 0$$

$$(V_n V_{j-1} + V_{j-1} V_n)\, a_{n+1} a_j = 0 \qquad (j \leqslant n)$$

$$(V_n^* V_{j-1} + V_{j-1} V_n^*)\, a_{n+1}^* a_j = 0 \qquad (j \leqslant n)$$

Nous pouvons considérer V_n comme un opérateur de $\mathbf{L}\,(\bigotimes_{i=1}^{n} \mathbf{H}_i)$, et en nous rappelant que l'action des a_j sur les vecteurs de cet espace ne peut donner zéro pour tout $j \leqslant n+1$, on montre sans peine que pour que ces relations soient vérifiées, il faut que :

$$V_n = \prod_{i<n} e^{i\Theta_i} (1-2N_i) .$$

PROPOSITION 9-1-1. — *Pour que la suite infinie dénombrable d'opérateurs* A_j *définie par :*

$$A_j = V_{j-1} a_j$$

où les a_j *ont été définis au chapitre III, forme une représentation des relations d'anticommutation dans* $\bigotimes_{i \varepsilon I} \mathbf{H}_i$, *il faut que pour tout* j *:*

$$V_j = \prod_{i \leqslant j} . e^{i\Theta_i} (1-2N_i)$$

Les opérateurs de la famille (1) tels que nous les avons construits au chapitre V semblent donc être les seuls opérateurs de cette forme qui réalisent une représentation des relations d'anticommutation dans l'espace $\bigotimes_{i \varepsilon I} \mathbf{H}_i$.

9-2 Représentation de la famille (2)

Considérons maintenant un opérateur $A_1 = a_1 V_1$, où a_1 est défini au chapitre III, et recherchons les conditions que doit vérifier V_1 pour que cet opérateur puisse être considéré comme le "premier" opérateur d'une suite d'opérateurs anticommutants.

On trouve sans peine la seule condition :

$$V_1 V_1^* = V_1^* V_1 = 1$$

Les opérateurs que nous avons dit appartenir à la famille (2) sont bien de ce type mais ce ne sont pas les seuls.

La recherche des opérateurs V_j tels que les $A_j = a_j V_j$ forment une représentation des relations d'anticommutation nous conduira à retrouver les représentations de la famille (2) plus un certain nombre d'autres représentations.

Notons pour terminer qu'il est possible, par un procédé analogue à celui que nous venons d'employer au cours de cette étude, de définir des représentations des relations d'anticommutations dans des espaces $\bigotimes_{i \varepsilon I} \mathbf{H}_i$ où les $\mathbf{H}_i$ ont un nombre fini de dimensions.

Dans le cas des représentations de la famille (1), nous pensons que l'on trouvera des représentations ayant des propriétés analogues à celles que nous avons trouvées ici.

Cependant, nous pensons qu'il est possible de trouver des représentations non équivalentes aux premières, ceci à cause de la différence qui est apparue dans la nouvelle définition des deux familles de représentations qui a été donnée dans ce dernier chapitre.

APPENDICES

APPENDICE A

Nous avons, au cours de cette étude, été amenés à étudier la nullité d'expressions de la forme $\prod_{i \in I} a_i$ où a_i est un nombre réel compris entre 0 et 1. Or, Von Neumann a montré que :

$$\prod_{i \in I} A_i = 0 \leftrightarrow \begin{cases} \sum_I \text{Max.}\,(A_i - 1,\ 0) < \infty \\ \text{et} \\ \sum_I |A_i - 1| < \infty \end{cases}$$

Or, dans notre cas $A_j \leqslant 1$, d'où :

LEMME. — *Le produit* $\prod A_i$, *où* a_i *est un nombre réel compris entre 0 et 1, est nul si et seulement si la série* $\sum_I |A_i - 1|$ *diverge.*

APPENDICE B

Considérons la série $\sum_I A_i$ et considérons une partition quelconque I_1, I_2 de I.

Nous pouvons écrire :

1) Si $\sum_I A_i = \infty$

Alors $\sum_{I_1} A_i = \infty$ ou $\sum_{I_2} A_i = \infty$

2) Si $\sum_I A_i < \infty$

Alors $\sum_{I_1} A_i < \infty$ et $\sum_{I_2} A_i < \infty$

APPENDICE C

Soient $\bigotimes^{C}_{i\in I} H_i$ et $\bigotimes^{D}_{i\in I} H_i$ deux espaces produits fortement incomplets et $(f_i ; i\in I)$ et $(g_i ; i\in I)$ les suites qui représentent respectivement les deux classes C et D (ces deux suites sont telles que tous leurs termes sont normés à l'unité).

Définissons dans chaque $L(H_i)$ un opérateur unimodulaire V_i par $V_i f_i = g_i$.

Alors l'opérateur $V = \prod_i V_i$ défini par $V \bigotimes_{i\in I} f_i = \bigotimes_{i\in I} V_i f_i$ applique $\bigotimes^{C}_{i\in I} H_i$ sur $\bigotimes^{D}_{i\in I} H_i$.

Si nous définissons V_i par sa matrice dans une base $(e^1_i ; e^2_i)$ de H_i :

$$V_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -\overline{b}_i & \overline{a}_i \end{pmatrix}$$

et si on pose $f_i = C^1_i e^1_i + C^2_i e^2_i$ $\qquad$ $g_i = D^1_i e^1_i + D^2_i e^2_i$,

$\| f_i \| = \| g_i \| = 1$ on trouve que les a_i et b_i sont définis par :

$$a_i = D^1_i C^1_i + C^2_i D^2_i \qquad b_i = D^1_i C^2_i - C^2_i D^2_i$$

Ceci nous prouve bien que quels que soient les deux espaces $\bigotimes^{C}_{i\in I} H_i$ et $\bigotimes^{D}_{i\in I} H_i$, il existe un opérateur unitaire $V = \prod_{i\in I} V_i$ qui applique un de ces espaces sur l'autre.

APPENDICE D

Nous allons tout d'abord traiter le cas des représentations de la famille (1 ; 0). Les autres cas s'en déduiront sans peine.

1 Représentations discrètes de la famille (1 ; 0)

Considérons une représentation se réalisant dans un espace $\bigotimes^{C}_{i\in I} H_i$ où la classe C est représentée par une suite de la forme $(e^{\alpha_i + 1}_i ; i\in I)$.

Une base orthonormale d'un tel espace est constituée par l'ensemble des vecteurs :

$$e_{I_p} = \bigotimes_{I-I_p} e^{\alpha_i}_{i+1} \bigotimes_{I_p} e^{\beta_i}_{i+1}$$

où $\beta_i = 1$ si $\alpha_i = 0$ et $\beta_i = 0$ si $\alpha_i = 1$.

Soit I_1 l'ensemble des i tels que $\alpha_i = 0$ et I_2 celui des i tels que $\alpha_i = 1$. Nous pouvons alors mettre un vecteur de base sous la forme :

$$e_{I_{p_1}, I_{p_2}} = \bigotimes_{I_{p_1}} e^1_i \bigotimes_{I_{p_2}} e^2_i$$

où $I_{p_1} = I - I_p \text{ inter } I_1 + I_p \text{ inter } I_2$

$I_{p_2} = I - I_p \text{ inter } I_2 + I_p \text{ inter } I_1$

On trouve alors sans peine :

THEOREME D-1. — *Soit* $\bigotimes_{i \in I}^{c} H_i$ *un espace où les représentations de la famille (1 ; 0) sont discrètes. Une base orthonormale complète d'un tel espace peut être définie par un ensemble de vecteurs* $e_{J,K} = \bigotimes_{J_i} e^1_i \bigotimes_{K_i} e^2_i$ *où* (J, K) *est une partition de* I.

Alors :

$j \in J$ $\quad A_j e_{J,K} = 0$ $\qquad A^*_j e_{J,K} = e_{J-j,\, K+j}$

$j \in K$ $\quad A_j e_{J,K} = e_{J+j,\, K-j}$ $\qquad A^*_j e_{J,K} = 0$

2 Représentations continues de la famille (1 ; 0)

Définissons dans chaque H_i deux éléments f^1_i et f^2_i par :

$$f_i = C^{1j}_i e^1_i + C^{2j}_i e^2_i \qquad C^{1j}_i \neq 0 \qquad C^{2j}_i \neq 0 \qquad (j = 1, 2)$$

$(f^1_i, f^2_i) = 0$ pour tous les i de I.

Alors l'ensemble des vecteurs $e_{I_p} = \bigotimes_{I-I_p} f^1_i \otimes f^2_{I_p i}$, où I_p est un ensemble fini, forme une base complète de $\bigotimes^c_{i \in I} H_i$.

En appliquant les résultats du chapitre IV, nous obtenons :

Pour tout $j \in I - I_p$:

$$A_j e_{I_p} = \bigotimes_{I-I_p} (1-2N) f^1_i f^1_i \otimes C^{12}_{jj} e^1_j \otimes \bigotimes_{I-I_p} f^1_i \otimes \bigotimes_{I_p} (1-2N) f^2_i f^2_i \otimes \bigotimes_{I_p} f^2_i f^2_i$$
$$i<j \qquad i>j \qquad i<i \qquad i>j$$

$$A^*_j e_{I_p} = \bigotimes_{I-I_p} (1-2N) f^1_i f^1_i \otimes C^{11}_{jj} e^2_j \otimes \bigotimes_{I-I_p} f^1_i \otimes \bigotimes_{I_p} (1-2N) f^2_i f^2_i \otimes \bigotimes_{I_p} f^2_i f^2_i$$
$$i<j \qquad i>j \qquad i<i \qquad i>j$$

Pour tout $j \in I_p$:

$$A_j e_{I_p} = \bigotimes_{I-I_p} (1-2N) f^1_i f^1_i \otimes \bigotimes_{I-I_p} f^1_i \otimes \bigotimes_{I_p} (1-2N) f^2_i f^2_i \otimes C^{22}_{jj} e^1_j \otimes \bigotimes_{I_p} f^2_i f^2_i$$
$$i<j \qquad i>j \qquad i>i \qquad i<j$$

$$A^*_j e_{I_p} = \bigotimes_{I-I_p} (1-2N) f^1_i f^1_i \otimes \bigotimes_{I-I_p} f^1_i \otimes \bigotimes_{I_p} (1-2N) f^2_i f^2_i \otimes C^{21}_{jj} e^2_j \otimes \bigotimes_{I_p} f^2_i f^2_i$$
$$i<j \qquad i>j \qquad i>i \qquad i>j$$

Pour calculer toutes les expressions de la forme $(A_j e_{I_p}, e_{I_q})$, décomposons l'ensemble des vecteurs de base en quatre sous-ensembles disjoints par :

— A est l'ensemble des e_{I_p} et e_{I_q} tels que l'intersection de I_p et de I_q est égale à $\varnothing$.

— B est l'ensemble des e_{I_p} et e_{I_q} tels que l'intersection de I_p et de $I_q \neq \emptyset$ et $\neq I_p$ et $\neq I_q$.

— C est l'ensemble des e_{I_p} et e_{I_q} tels que l'intersection de I_p et de I_q est égale à I_p.

— D est l'ensemble des e_{I_p} et e_{I_q} tels que l'intersection de I_p et de I_q est égale à I_p.

Etude du cas de l'ensemble A

Mettons e_{I_q} sous la forme $e_{I_q} = \bigotimes_{I-I_p} f^3_i \bigotimes_{I_p} f^1_i$

avec $f^3_i = f^1_i$ si $i \in I - I_p - I_q$ et $= f^2_i$ si $i \in I_q$

Nous pouvons alors écrire : si $j \in I - I_p$

$$(A_j e_{I_p}, e_{I_q}) = \prod_{\substack{I-I_p-I_q \\ i<j}} (U_i f^1_i, f^1_i) \prod_{\substack{I_q \\ i>j}} (U_i f^1_i, f^2_i) (C^{12}_j e^1_j, f^3_j) \prod_{\substack{I_q \\ i>j}} (f^1_i, f^2_i) \prod_{\substack{I_p \\ i<j}} (U_i f^2_i, f^1_i) \prod_{\substack{I_p \\ i>j}} (f^2_i, f^1_i)$$

où l'on a posé pour simplifier $U_i = (1 - 2N_i)$. Vu la façon dont a été défini la base, nous avons :

$$(U_i f^j_i, f^k_i) \neq 0 \qquad j \text{ et } k = 1, 2$$

Alors :

1) ou $(i \in I_p \; ; \; i > j) \neq \emptyset$
   ou $(i \in I_q \; ; \; i > j) \neq \emptyset$ $\Bigg]$ $(A_j e_{I_p}, e_{I_q}) = 0$

2) si et $(i \in I_p \; ; \; i > j) = \emptyset$
   et $(i \in I_q \; ; \; i > j) = \emptyset$ $\Bigg]$ $(A_j e_{I_p}, e_{I_q}) \neq 0$

Dans le cas où $j \in I_p$, les résultats seront semblables car seul le terme en j est modifié dans l'expression du produit scalaire ci-dessus.

Les autres cas se traitent de façon tout à fait analogue. Nous nous contenterons donc de donner les résultats sans démonstrations.

THEOREME D-2. — *Soit* $\bigotimes_{i \in I}^{C} H_i$ *un espace où se réalise une représentation continue de la famille (1 ; 0). Supposons cet espace rapporté à une base orthonormale complète* $e_p^I = \bigotimes_{I-I_p} f_{i\,p}^1 \otimes f_{i\,p}^2$

où $f_i = C_i^{1j}\, e^1 + C_i^{2j}\, e^2 \qquad (j = 1, 2)$

A, B, C, D *sont les ensembles de vecteurs de base définis au début du paragraphe 2. Posons :*

$$(A\ e_j\ ,\ e_p^I\ e_q^I) = P \qquad (A^*\ e_j\ ,\ e_p^I\ e_q^I) = P^*$$

I. — *Pour tous les vecteurs de base de* A, *on a :*

si ou $(i \in I_p\ ;\ i > j) \neq \varnothing$

$$P = 0 = P^*$$

ou $(i \in I_p\ ;\ i > j) \neq \varnothing$

Si ces deux espaces sont vides, P *est non nul et a pour valeur :*

Pour tout $j \in I - I_p$:

$$P = \prod_{\substack{I-I_p-I_q \\ i<j}} (U_i\, f_i^1, f_i^1) \prod_{\substack{I \\ i<j}} (U_i\, f_i^2, f_i^1) \prod_{\substack{I_p \\ i<j}} (U_i\, f_i^1, f_i^2)\, C_j^{12}\, (e_j^1, f_j^3)$$

$$P^* = \prod_{\substack{I-I_p-I_q \\ i<j}} (U_i\, f_i^1, f_i^1) \prod_{\substack{I \\ i<j}} (U_i\, f_i^2, f_i^1) \prod_{\substack{I_p \\ i<j}} (U_i\, f_i^1, f_i^2)\, C_j^{11}\, (e_j^2, f_j^3)$$

Pour tout $j \in I_p$:

$$P = \prod_{\substack{I-I_p-I_q \\ i<j}} (U_i\, f_i^1, f_i^1) \prod_{\substack{I \\ i<j}} (U_i\, f_i^2, f_i^1) \prod_{\substack{I_p \\ i<j}} (U_i\, f_i^1, f_i^2)\, C_j^{22}\, (e_j^1, f_j^1)$$

$$P^* = \prod_{\substack{I-I_p-I_q \\ i<j}} (U_i\, f_i^1, f_i^1) \prod_{\substack{I \\ i<j}} (U_i\, f_i^2, f_i^1) \prod_{\substack{I_p \\ i<j}} (U_i\, f_i^1, f_i^2)\, C_j^{21}\, (e_j^2, f_j^1)$$

où $f_i^3 = f_i^1$ *pour* $i \in I - I_p - I_q$; $f_i^3 = f_i^2$ *pour* $j \in I_q$.

On a posé $U_i = 1 - 2N_i$.

II. — *Pour tous les vecteurs de base de* B, *on a :*

si $(i \in I_p - I_q \; ; \; i > j) \neq \emptyset \qquad P = 0 = P^*$

Si cet ensemble n'est pas vide, P *est non nul et a pour valeur :*

Pour tout $j \in I - I_p$:

$$P = \prod_{\substack{I - I_p \\ i<j}} (U_i \, f^1_i, \, f^1_i) \prod_{\substack{I_p \\ i<j}} (U_i \, f^2_i, \, f^4_i) \; C^{12}_j \; (e^1_j, \, f^1_j)$$

$$P^* = \prod_{\substack{I - I_p \\ i<j}} (U_i \, f^1_i, \, f^1_i) \prod_{\substack{I_p \\ i<j}} (U_i \, f^2_i, \, f^4_i) \; C^{11}_j \; (e^2_j, \, f^1_j)$$

Pour tout $j \in I_p$:

$$P = \prod_{\substack{I - I_p \\ i<j}} (U_i \, f^1_i, \, f^1_i) \prod_{\substack{I_p \\ i<j}} (U_i \, f^2_i, \, f^4_i) \; C^{22}_j \; (e^1_j, \, f^4_j)$$

$$P^* = \prod_{\substack{I - I_p \\ i<j}} (U_i \, f^1_i, \, f^1_i) \prod_{\substack{I_p \\ i<j}} (U_i \, f^2_i, \, f^4_i) \; C^{21}_j \; (e^2_j, \, f^4_j)$$

où $f^4_i = f^1_i$ *pour* $i \in I_p - I_q \; ; \; = f^2_i$ *pour* $i \in I_q$.

III. — *Pour tous les vecteurs de base de* C, *on a :*

si $(i \in I_p - I_q \; ; \; i > j) \neq \emptyset \qquad P = P^* = 0$

Si cet ensemble n'est pas vide, P *n'est pas nul et a pour valeur :*

Pour tout $j \in I - I_p$:

$$P = \prod_{\substack{I - I_p \\ i<j}} (U_i \, f^1_i, \, f^1_i) \prod_{\substack{I_p \\ i<j}} (U_i \, f^2_i, \, f^5_i) \; C^{12}_j \; (e^1_j, \, f^1_j)$$

$$P^* = \prod_{\substack{I - I_p \\ i<j}} (U_i \, f^1_i, \, f^1_i) \prod_{\substack{I_p \\ i<j}} (U_i \, f^2_i, \, f^5_i) \; C^{11}_j \; (e^2_j, \, f^1_j)$$

Pour tout $j \in I_p$:

$$P = \prod_{\substack{I - I_p \\ i < j}} (U_i\, f_i^1, f_i^1) \prod_{\substack{I_p \\ i < j}} (U_i\, f_i^2, f_i^5)\, C_j^{21}\, (e_j^1, f_j^5)$$

$$P^* = \prod_{\substack{I - I_p \\ i < j}} (U_i\, f_i^1, f_i^1) \prod_{\substack{I_p \\ i < j}} (U_i\, f_i^2, f_i^5)\, C_j^{22}\, (e_j^2, f_j^5)$$

où $f_i^5 = f_i^1$ *pour* $i \in I_p - I_q$; $= f_i^2$ *pour* $i \in I_q$.

IV. — *Pour tous les vecteurs de base de* D, *on obtient des résultats analogues à ceux de* III. *Il suffit, pour avoir les valeurs de* P, *d'échanger les rôles de* I_p *et* I_q .

V. — *Si* $I_p = I_q$ $(A_j\, e_{I_p}, e_{I_q})$ *n'est jamais nul, sa valeur se trouve sans peine.*

3 Cas des autres représentations

Nous nous bornerons ici à indiquer les résultats. Nous avons vu au chapitre IX comment passer d'une famille de représentation à une autre.

THEOREME D-3. — *Posons* $A_j\,(1\,;0)\, e_{I_p}^k = \Sigma \alpha_{pq}^k\, e_{I_q}^l$ *où* $(e_{I_p}^k)$ *est une base de l'espace* $(\bigotimes_{i \varepsilon I}^{Ck} H_i)$. *Les valeurs des* α_{pq}^k *sont faciles à calculer comme nous l'avons vu.*

Soit une représentation de la famille $(1\,;\infty)$ *dans un espace* $H = \bigoplus_k (\bigotimes_{i \varepsilon I}^{Ck} H_i)$ *et soit* $E_{I_p}^k = (0,\ldots, e_{I_p}^k, 0\ldots)$ *[où le seul terme non nul est à la* $k^{ième}$ *place] une base de cet espace. On a alors :*

$$A_j\,(1\ ;\ \infty)\, E_{I_p}^k = (0,\ldots,\, 0\ ;\, \Sigma_p\ \alpha_{pq}^k\ e_{I_q}^{k+1}\ ;\ 0,\ldots)$$

où le seul terme non nul est à la $(k+1)^{ième}$ *place.*

II. — *Soit une représentation de la famille* $(2\,;0)$ *dans un espace* $H = \bigotimes_{i \varepsilon I}^{C1} H_i \oplus \bigotimes_{i \varepsilon I}^{C2} H_i$ *et soit* $E_{I_p}^1 = (e_{I_p}^1, 0)$ *et* $E_{I_p}^2 = (0, e_{I_p}^2)$ *les*

vecteurs de base de cet espace. On a :

$$A_j(2;0)\,E^1_{lp} = \sum_q \alpha^1_{pq}\,E^2_{lq}$$

$$A_j(2;0)\,E^2_{lp} = \sum_q \alpha^1_{pq}\,E^1_{lq}$$

III. — *Soit une représentation de la famille (2 ; ∞) dans un espace* $H = \bigoplus_k \left(\bigotimes_{i\,\varepsilon\,I}^{c_k} H_i\right)$ *et soit* $E^k_{lp} = (0,\ldots, 0, e^k_{lp}, 0,\ldots)$ *[où le seul terme non nul est à la* $k^{ième}$ *place] les vecteurs de base de cet espace. On a :*

$$A_j(2;\infty)\,E^{2k}_{lp} = \sum_q \alpha^{2k}_{pq}\,E^{2k+1}_{lq}$$

$$A_j(2;\infty)\,E^{2k+1}_{lp} = \sum_q \alpha^{2k}_{pq}\,E^{2k+2}_{lq}$$

BIBLIOGRAPHIE

I) **Sur les produits tensoriels infinis et leurs applications**

1. Von Neumann, *Compo. Math.,* 6-1-1938.
2. Friedrichs, *Comm. in Pure and Appl. Math.,* 5-367-1952.
3. Friedrichs, *Mathematical aspects of the quantum field theory Intersciences publishers N.Y.,* 1953.
4. Albertoni, *Nuovo Cimento,* 6-1193-1957.
5. Cordesse, *Thèse de troisième cycle* (non publiée).

II) **Sur les représentations des relations d'anticommutation**

6. Jordan, *Zeits für Phys.,* 45-751-1927.
7. Wightmann et Schweber, *Phys. Rev.,* 98-812-1955.
8. Wightmann et Garding, *Proc. of Nat. Acc. of Sci.,* 40-612-1954.
9. Nigan et Foldy, *Phys. Rev.,* 102-1410-1956.
10. Araki et Wyss, *Helv. Phys. Acta,* 37-136-1964.

III) **Sur les êtres mathématiques utilisés**

11. Rideau et George, *Séminaire sur les représentations, Paris* (non publié).
12. Mackey, *Lect. Note of Univ. of Chicago,* 1955.
13. Guichardet, *Les algèbres de Von Neumann, séminaire Poitiers* (non publié).
14. Dixmier, *Les algèbres d'opérateurs dans les espaces hilbertiens,* Gauthier-Villars, Paris.
15. Naïmark Normed Rings, *P. Noordhoff,* Groningen, Hollande.

DEUXIÈME THÈSE

Proposition donnée par la Faculté :

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

sur une formule de M. Lichnérowicz

Vu et approuvé :

Paris, le 19 Mai 1965.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Marc ZAMANSKY

VU

et Permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean ROCHE